

大阪工業大学 正会員○後野正雄
竹中道路 河野高輝
丸磯建設 谷口伸彦
五洋建設 味田勇二

1. まえがき

特殊な構造物やリーフを有する海岸には水深の不連続部が生じる。この水深の不連続部における波の変形を求める代表的手法としては領域分割法がある。しかし、領域分割法は一定水深の制限がある。一方、緩勾配方程式を水深の不連続部に対しても適用できるように工夫する試みもある (Tsutsui & Lewis, 1991)。しかし、緩勾配方程式は速度ポテンシャルの鉛直構造として cosh 型の進行波成分のみを用いており、散乱項を必要とする水深不連続部の解析は原理的には不可能である。これに対して著者らの一人が提案した連成振動方程式では鉛直構造として鉛直座標 z の多項式を用いており、進行波成分と散乱項を同時に考慮することが原理的に可能である。本研究は定常型の連成振動方程式を明らかにし、スプライン関数を用いた数値計算手法を提案するとともにステップ型的水深不連続部に対する適用性を検討する。

2. 定常型連成振動方程式

後野 (1993) は一定水深における連成振動方程式を提案している。この方程式を緩勾配の任意地形に対する方程式に書き換える。変動圧力 $\tilde{p}(=p/\rho + gz)$ のラプラス方程式をガラーキン法を用いる際に水底の境界条件式を加えておく。

$$\int_{-h}^0 P_{2(m-1)}(\tilde{z}) \Delta \tilde{p} dz + P_{2(m-1)}(0) \left\{ \nabla h \cdot \nabla \tilde{p} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \right\} \Big|_{z=-h} = 0, \quad m = 1, 2, 3 \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $P_m(z)$ は m 次のルジャンドルの多項式、 $\tilde{z} = 1 + z/h$ 、 Δ ；三次元のラプラス演算子、 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ 、である。また、 $\tilde{p} = q_1 P_0(\tilde{z}) + q_2 P_2(\tilde{z}) + q_3 P_4(\tilde{z}) + q_4 P_6(\tilde{z})$ と定義する。これによって、緩勾配 ($|\nabla h|^2 \ll 1$) 任意地形上の連成振動方程式は次式で表される。

$$\nabla^2 q_1 + \frac{\nabla(88q_1 + 24q_2 - 88q_3)}{128h} \nabla h - \frac{21q_1 + 18q_2 + 11q_3}{h^2} = \frac{40g\nabla\eta\nabla h}{128h} - \frac{21g\eta}{h^2} \dots \dots (2-a)$$

$$\nabla^2 q_2 + \frac{\nabla(-190q_1 + 258q_2 + 330q_3)}{128h} \nabla h - \frac{90q_1 + 90q_2 + 55q_3}{h^2} = -\frac{130g\nabla\eta\nabla h}{128h} - \frac{90g\eta}{h^2} \dots \dots (2-b)$$

$$\nabla^2 q_3 + \frac{\nabla(99q_1 - 693q_2 - 205q_3)}{128h} \nabla h - \frac{99q_1 + 99q_2 + 99q_3}{h^2} = \frac{333g\nabla\eta\nabla h}{128h} - \frac{99g\eta}{h^2} \dots \dots (2-c)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{1}{h} (21g\eta - 21q_1 - 18q_2 - 11q_3) \dots \dots \dots (3)$$

この非定常の方程式では水深不連続部への適用性をみるためには不便である。また、定常規則波の解析の要望も根強いことから、この方程式を定常規則波に適用する。まず、 $q_m = \hat{q}_m \exp(i\sigma t)$ 、 $\eta = \hat{\eta} \exp(i\sigma t)$ とおいて上式に代入し、 $\hat{\eta}$ を消去すると以下の定常型連成振動方程式が得られる。

$$\nabla^2 \hat{q}_1 + \frac{\nabla h}{h} \left\{ \left(\frac{11}{16} + \frac{5}{16\alpha} \right) \nabla \hat{q}_1 + \left(\frac{3}{16} + \frac{15}{56\alpha} \right) \nabla \hat{q}_2 + \left(\frac{-11}{16} + \frac{55}{336\alpha} \right) \nabla \hat{q}_3 \right\} \\ + \frac{1}{h^2} \left\{ \left(\frac{21}{\alpha} - 21 \right) \hat{q}_1 + \left(\frac{18}{\alpha} - 18 \right) \hat{q}_2 + \left(\frac{21}{\alpha} - 21 \right) \hat{q}_3 \right\} = 0 \dots \dots (4-a)$$

$$\nabla^2 \hat{q}_2 + \frac{\nabla h}{h} \left\{ \left(\frac{-95}{64} - \frac{65}{64\alpha} \right) \nabla \hat{q}_1 + \left(\frac{129}{64} - \frac{195}{224\alpha} \right) \nabla \hat{q}_2 + \left(\frac{165}{64} - \frac{715}{1344\alpha} \right) \nabla \hat{q}_3 \right\} \\ + \frac{1}{h^2} \left\{ \left(\frac{90}{\alpha} - 90 \right) \hat{q}_1 + \left(\frac{540}{7\alpha} - 90 \right) \hat{q}_2 + \left(\frac{330}{7\alpha} - 55 \right) \hat{q}_3 \right\} = 0 \dots \dots (4-b)$$

$$\nabla^2 \hat{q}_3 + \frac{\nabla h}{h} \left\{ \left(\frac{99}{128} + \frac{333}{128\alpha} \right) \nabla \hat{q}_1 + \left(\frac{-693}{128} + \frac{999}{448\alpha} \right) \nabla \hat{q}_2 + \left(\frac{-205}{128} + \frac{1221}{896\alpha} \right) \nabla \hat{q}_3 \right\} \\ + \frac{1}{h^2} \left\{ \left(\frac{99}{\alpha} - 99 \right) \hat{q}_1 + \left(\frac{594}{7\alpha} - 99 \right) \hat{q}_2 + \left(\frac{363}{7\alpha} - 99 \right) \hat{q}_3 \right\} = 0 \dots \dots (4-c)$$

ここで、 $\alpha = 1 - \sigma^2 h / 21g$ 、 σ は角周波数である。

3. スプラインを応用した数値計算法

先の連成振動方程式を精度良くかつ効率的に計算するため、スプライン関数を応用した数値計算法を用いた。ここでは1次元(x 座標)に限って以下の議論を行う。まず、 $\hat{q}_m$ の空間勾配 $\hat{s}_m(=\partial\hat{q}_m/\partial x)$ も未知変数とする。次にある接点間(区間)の $\hat{q}_m$ の変化を接点上の $\hat{q}_m, \hat{s}_m$ を用いて x の3次関数で表す。このとき隣り合う区間で共有される接点上の2回微分値($\partial^2\hat{q}_m/\partial x^2$)が連続するものとして、次のようなスプラインの条件式が得られる。

$$\lambda_j \hat{s}_{m,j-1} + 2\hat{s}_{m,j} + \mu_j \hat{s}_{m,j+1} = 3\lambda \frac{\hat{q}_{m,j} - \hat{q}_{j,j-1}}{dx_j} + 3\mu_j \frac{\hat{q}_{m,j+1} - \hat{q}_{m,j}}{dx_{j+1}}, \quad (j=2, \dots, N-1, m=1, 2, 3) \quad (5)$$

ここで添字の j は接点番号、 N は総接点数、 dx_j は j 番目と $j-1$ 番目の接点間距離、 $\lambda = dx_j/(dx_j + dx_{j-1})$ 、 $\mu_j = 1 - \lambda_j$ である。区間 $[j-1, j]$ の両端における2階の微分値はそれぞれ次のように与えられる。

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{q}_m}{\partial x^2} \right|_j = 2 \frac{\hat{s}_{m,j-1}}{dx_j} + 4 \frac{\hat{s}_{m,j}}{dx_j} - 6 \frac{\hat{q}_{m,j} - \hat{q}_{m,j-1}}{dx_j^2} \quad \dots (6-a)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \hat{q}_m}{\partial x^2} \right|_{j-1} = -4 \frac{\hat{s}_{m,j-1}}{dx_j} - 2 \frac{\hat{s}_{m,j}}{dx_j} + 6 \frac{\hat{q}_{m,j} - \hat{q}_{m,j-1}}{dx_j^2} \quad \dots (6-b)$$

この2階微分値を式(4)に代入すれば、式(5)とともに、未知変数 $\hat{q}_m, \hat{s}_m$ に関する方程式が $j=2, \dots, N-1$ に関して2本ずつ立てられる。両端点については境界条件を加えることにより、すべての接点上での未知数を求めることができる。なお、入射端については未知変数を入射波(既知)と反射波(未知)に分離する。入射端には反射波の、他端には透過波の透過条件を与える。すなわち、入射端を除いて、すべての接点上の未知量は入射波成分と反射波成分が合成されたものとなる。またこれにより反射率を容易に求めることができる。本数値計算法の特徴はこれ以外に、接点の間隔が自由にとれることが上げられる。

4. ステップ地形への適用

図-1中に示したような水深不連続部($x = x_0$)に接点を置く。この位置での物理量、例えば $\bar{p}$ を $\bar{p}^+ = \bar{p}|_{x=x_0+0}$ と $\bar{p}^- = \bar{p}|_{x=x_0-0}$ に分けて考える。すなわち、この接点には $\hat{q}_m^+, \hat{s}_m^+, \hat{q}_m^-, \hat{s}_m^-$ の4種類の未知量が存在する。このとき力学的、運動学的境界条件として次の2つが必要である。

$$\bar{p}^- = \bar{p}^+, \quad \text{for } -rh < z < 0 \quad \dots (7)$$

$$u^- = \begin{cases} u^+, & \text{for } -rh < z < 0 \\ 0, & \text{for } -h < z < -rh \end{cases} \quad \dots (8)$$

運動方程式($\partial u/\partial t + \partial \bar{p}/\partial x = 0$)を用いて u を消去し、式(4)と同様の式を求めると以下のような式が得られる。

$$\hat{q}_m^+ = \sum_{k=1}^3 \{a_{m,k}\} \hat{q}_k^-, \quad \text{for } m=1, 2, 3 \quad \dots (9)$$

$$\hat{s}_m^- = \sum_{k=1}^3 \{b_{m,k}\} \hat{s}_k^+, \quad \text{for } m=1, 2, 3 \quad \dots (10)$$

ここで、 $a_{m,k}, b_{m,k}$ は α をパラメーターとし、不連続部の水深比 r の多項式で表される関数である。ただし、不連続部近傍は $\nabla h = 0$ としている。図-1は本手法で求めた水深不連続部による反射率 K_r と透過率 K_t を領域分割法による解析解と比較したものである。図中下の部分が反射率、上が透過率、実線が解析解、丸印が本手法による計算結果

で、パラメーターは $k_0 h (= \sigma^2 h/g)$ である。入射波は x 軸の正の方向へ進行する場合の結果である。両者は良く一致しており、本手法が不連続地形へ直接適用可能であることが分かる。

参考文献

- 後野正雄(1993);緩勾配地形上の不規則波動場の支配方程式とその特性, 第40回海岸工学論文集, pp.21-25
Tsutsui, S. and D. P. Lewis(1991);Wave height prediction in unbounded coastal domains with bathymetric discontinuity, C.E.J., Vol. 34, No. 2, pp.145-158

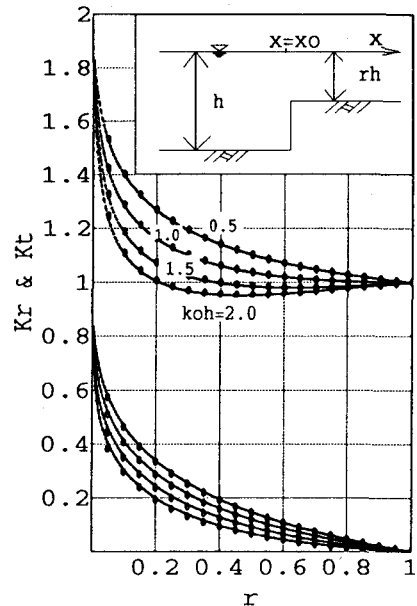


図-1 ステップ地形における透過・反射率