第Ⅰ部門

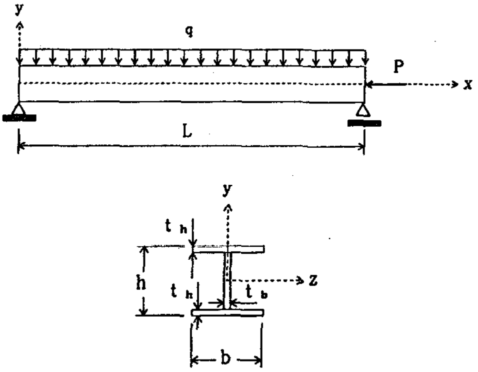
# 有限要素法を適用した動的緩和法:梁ー柱への適用

関西大学工学部　正員　三上　市藏
日本電子計算　正員　竹原　和夫
復建調査設計　正員　○石上洋二郎

## 1. まえがき

構造工学の分野において，弾塑性解析や有限変位解析など種々の非線形解析に有効である演算パイプライン方式のベクトル計算機を使用する場合，ピーク性能を引き出すのは容易ではない．有限要素法，差分法などで遭遇する大型の連立方程式を解くには反復解法が適しているが，一般に解法やプログラミングに種々の工夫が必要になる．一方，反復解法の一種である動的緩和法 (Dynamic Relaxation Method)[1] は，個々の反復計算は簡単な代数計算であり，プログラミングも比較的容易である．通常，場と時間に関して差分法で離散化されるが，場に関しては有限要素法でも離散化可能である．むしろ，有限要素法の方が任意に要素分割できることから，様々な形状の構造物を解析する点で有利である．

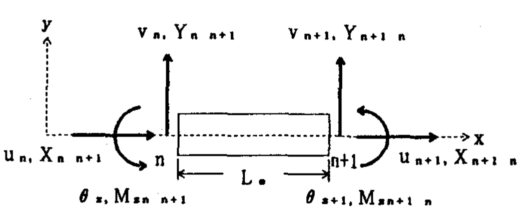
有限要素法を適用した動的緩和法による解法[2)3)]は既に報告されているが，これらは反復計算に動的緩和法を用いているだけで，非線形解析の場合には安定して解が得られない．本研究では，動的緩和法本来の定式化を，有限要素法を適用した動的緩和法に試みる．例題として，等分布横荷重と軸方向圧縮力を受ける梁ー柱の弾性微小変位解析を考える．




図－1　解析モデル

## 2. 基本式

図－1に示す等分布横荷重qと軸方向圧縮力Pを受ける単純支持された梁ー柱の弾性微小変位解析を行う．動的緩和法では減衰自由振動を変位速度ー変位関係式，断面力ー変位関係式を使って境界条件式のもとで計算する．ここでは場に関しては $x$ 軸方向にn分割，時間に関しては $\Delta t$ 間隔に分割する．図－2に示す要素を考え，時刻 $(p-1/2)\Delta t$ における断面力 $X, Y, M_z$ と変位 $u, v, \theta_z$ の関係式として次式を用いる．

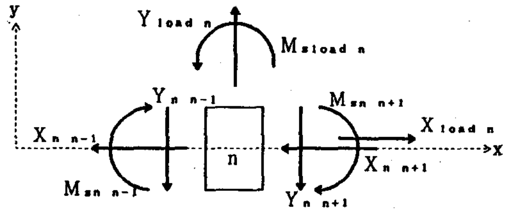



図－2　要素のつりあい

$$\begin{pmatrix} X_{n\ n+1} \\ Y_{n\ n+1} \\ M_{z\ n\ n+1} \\ X_{n+1\ n} \\ Y_{n+1\ n} \\ M_{z\ n+1\ n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_e} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L_e^3} & \frac{6EI_z}{L_e^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{L_e^3} & \frac{6EI_z}{L_e^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L_e^2} & \frac{4EI_z}{L_e} & 0 & \frac{-6EI_z}{L_e^2} & \frac{2EI_z}{L_e} \\ \frac{-EA}{L_e} & 0 & 0 & \frac{EA}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{L_e^3} & \frac{-6EI_z}{L_e^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L_e^3} & \frac{-6EI_z}{L_e^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L_e^2} & \frac{2EI_z}{L_e} & 0 & \frac{-6EI_z}{L_e^2} & \frac{4EI_z}{L_e} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_{z\ n} \\ u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ \theta_{z\ n+1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ichizou MIKAMI, Kazuo TAKEHARA, Yojiro ISHIGAMI

次に，荷重は節点に作用するものとし，節点のつりあい (図－3) を考え，慣性項と減衰項を付加して運動方程式とする．これを，時刻 $(p-1/2)\Delta t$ において中央差分表示すると次式が得られる．




図－3　節点のつりあい

$$\dot{u}_{n,p}=\left[\frac{1}{1+0.5C_u\Delta t/m}\right]\left[\left(1-\frac{0.5C_u\Delta t}{m}\right)\dot{u}_{n,p-1}+\frac{\Delta t}{m}\{X_{loadn}-(X_{n\ n-1}+X_{n\ n+1})\}_{p-1/2}\right]\cdots\text{(2-a)}$$

$$\dot{v}_{n,p}=\left[\frac{1}{1+0.5C_v\Delta t/m}\right]\left[\left(1-\frac{0.5C_v\Delta t}{m}\right)\dot{v}_{n,p-1}+\frac{\Delta t}{m}\{Y_{loadn}-(Y_{n\ n-1}+Y_{n\ n+1})\}_{p-1/2}\right]\cdots\cdots\text{(2-b)}$$

$$\dot{\theta}_{z\,n,p}=\left[\frac{1}{1+0.5C_M\Delta t/m}\right]\left[\left(1-\frac{0.5C_M\Delta t}{m}\right)\dot{\theta}_{z\,n,p-1}+\frac{\Delta t}{m}\{M_{z\,loadn}-(M_{z\,n\ n-1}+M_{z\,n\ n+1})\}_{p-1/2}\right]\cdots\text{(2-c)}$$

変位と変位速度の関係式は時刻 $(p-1/2)\Delta t$ において次のようになる．

$$u_{n,p+1/2}=u_{n,p-1/2}+\Delta t\ \dot{u}_{n,p}\cdots\cdots\text{(3-a)}$$

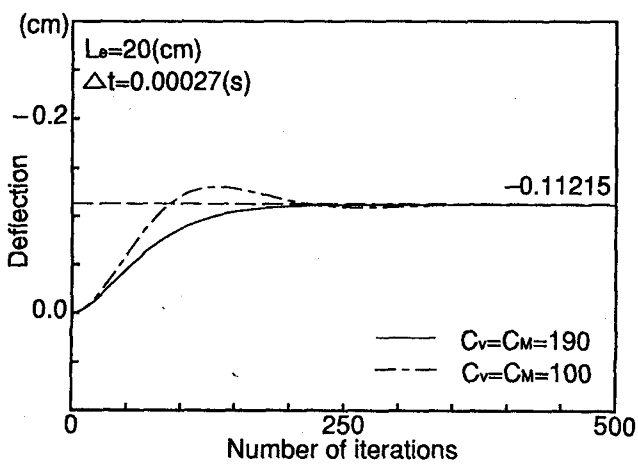
$$v_{n,p+1/2}=v_{n,p-1/2}+\Delta t\ \dot{v}_{n,p}\cdots\cdots\text{(3-b)}$$

$$\theta_{z\,n,p+1/2}=\theta_{z\,n,p-1/2}+\Delta t\ \dot{\theta}_{z\,n,p}\cdots\cdots\text{(3-c)}$$

境界条件は $x=0$ で $M_z=u=v=0$，$x=L$ で $M_z=v=0, X=-P$ である．初期条件を $u=v=\theta_z=\dot{u}=\dot{v}=\dot{\theta}_z=X=Y=M_z=0$ とし，反復計算を行うと変位速度が 0 に収束し，静的解に到達する．

## 3. 解析例

例として，$E=2.1\times10^6(kgf/cm^2)$, $I_z=4423.0(cm^4)$, $A=40.0(cm^2)$, $q=50.0(kgf/cm)$, $P=1000.0(kgf)$ の梁－柱を $x$ 軸方向に 10 分割し解析を行った．$y$方向の最大変位と反復回数の関係を図－4 に示す．これより反復回数 250 回で解が安定して得られていることがわかる．




図－4　解析結果

## 4. あとがき

梁に関して有限要素法を適用した動的緩和法の定式化を，梁－柱の弾性微小変位解析を例に試みた．この解法を梁－柱の弾性有限変位解析に拡張する方法を現在検討中である．詳細については，発表当日に譲る．

**参考文献**


1) 馬場俊介・盛岡昌夫：土木学会誌，Vol.58, No.9, 1973.10.
2) F.A.N.Al-Shawi : Dynamic relaxation technique for the solution of finite element equations in structural analysis. Bull. Coll. Engng5, pp155-177, 1981.
3) Lynch. R.D., Kelsey, S. and Saxe, H.C. : The application of dynamic relaxation to the finite element methods of structural analysis, Technical Report No.themis-und-68-1, Univ. of Notre Dame, 1968.9.