

京都大学防災研究所 正 員 佐藤忠信

京都大学工学部 正 員 土岐憲三

京都大学工学部 学生員 ○宮西洋幸

1 はじめに

地震波動の伝播現象を対象として、観測点において地震動の時系列が観測されるという条件のもとで、未観測点における地震波動を観測された地震動の時刻歴の線形和により実時間で補間する手法を提案する。

2 逐次型シミュレーションの理論

時刻 t における観測点と未観測点あわせて n 個の点での地震動からなるベクトルを $z(t)$ とすると

$$z(t)^T = \{g_1(t) \quad g_2(t) \quad \cdots \quad g_n(t)\} \quad (1)$$

ここに $g(t)$ は時刻 t における地震動である。さらに $z(t)$ が次の自己回帰過程で表せると仮定する。

$$z(t) = -A_1 z(t-1) - A_2 z(t-2) - \cdots - A_q z(t-q) + \Gamma v(t) \quad (2)$$

上式において $A_i = [a_{ij}]$ ($n \times n$) は、場与えられる相互相関関数によって決定され、場の特性を示す自己回帰過程の係数行列であり $v(t)$ はガウス白色雑音である。ここでいくつかの過去の時刻歴での z を集めて、 $q \times n$ 個の要素からなる縦ベクトル $Z(t)$ を以下のように定義する。

$$Z(t)^T = \{z(t)^T \quad z(t-1)^T \quad \cdots \quad z(t-q+1)^T\} \quad (3)$$

ここで式(2)を離散系のシステム方程式に書き直すと

$$z(t) = -[\Phi]Z(t-1) + \Gamma v(t) \quad , \quad \Phi = [A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_q] \quad (4)$$

のように表せる。上式において Φ は自己回帰係数行列からなる行列であり、 $z(t)$ の分散行列を計算すると、

$$M_t = E[(z(t) - \bar{z}(t))(z(t) - \bar{z}(t))^T] = \Phi P_{t-1} \Phi^T + \Gamma Q_{t-1} \Gamma^T \quad (5)$$

時刻 $t-1$ におけるシステム共分散行列は場与えられた相互相関関数によって式(6)のように決定できる。

$$P_{t-1} = E[ZZ^T] = \begin{bmatrix} R(0) & R(1) & R(2) & \cdots & R(q-1) \\ R(-1) & R(0) & R(1) & & R(q-2) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \\ R(1-q) & R(2-q) & & & R(0) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$R(k) = [p_{ij}(k)]$ であり、 k により決まる時刻差 τ 、点 i と j の間の距離 x_0 の時の相互相関関数の値である。次に式(4)の転置を行ったものに左から $z(t-p)$ ($p=1 \sim q$) を乗じて、その期待値を取ると

$$E[z(t-p)z(t)^T] = -E[z(t-p)z(t-1)^T]A_1^T - \cdots - E[z(t-p)z(t-q)^T]A_q^T \quad (7)$$

式(7)となり、式(8)のような連立方程式を得る。これを解くことにより A_i ($i=1 \sim q$) が求まり、自己回帰過程の係数行列 Φ を決定できるので、 $z(t)$ を逐次推定してゆくことが可能となる。

$$R(-1) = -R(0)A_1^T - \cdots - R(q-1)A_q^T$$

$$\vdots$$

$$R(1-q) = -R(2-q)A_1^T - \cdots - R(1)A_q^T$$

$$R(-q) = -R(1-q)A_1^T - \cdots - R(0)A_q^T$$

つぎに n 個の点の内 m 個の点において観測が行われている場合、観測量のベクトルを y_t とすると以下のよう観測方程式が得られる。

$$y_t = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{t,m} \\ z_{t,n-m} \end{Bmatrix} \quad , \quad H = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad R = 0 \quad (9)$$

ここで I は $m \times m$ の単位行列であり $z_{t,m}$ は時刻 t において観測地点で観測される物理量とし、観測ノイズはないものとする。次に(5)式の M_t を以下のよう

$$M_t = \begin{bmatrix} M_{t,m} & M_{t,m-n} \\ M_{t,n-m}^T & M_{t,n-n} \end{bmatrix} \quad (10) \quad \text{に観測点部分と未観測点部分に分離する。}$$

この場合カルマンフィルタ¹⁾のカルマンゲイン K_i は式(11)の様な $n \times m$ の行列となり、これを最尤推定式である $\hat{z}_i = \bar{z}_i + K_i(y_i - H\bar{z}_i)$ に代入すれば式(12)を得る。式(12)より明らかなように、観測が行われるとその地点の最尤推定値は観測値そのものになり、未観測点での物理量は観測値の物理量の重み付き平均値で求められている。今観測点の物理量の平均値 $\bar{z}_{i,m}$ がゼロベクトルならば式(13)はクリッキング法と完全に一致する。観測によって M_i から修正される共分散 P_i は $P_i = M_i - K_i H M_i$ を用いての式(13)のように与えられる。 P_i の右下部分はクリッキングによって得られる共分散を示している。0行列となっている部分は実際に観測された数値が関わった共分散であり、観測を行った場合は必ず0行列となる。式(4)と(12)により逐次最尤推定量を更新して行くことによって、未観測点での波形を順次求めるのがこの手法の特徴である。

$$K_i = M_i H^T (H M_i H^T + R)^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ M_{m,m}^T M_{i,m}^{-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{z}_{i,m} \\ \hat{z}_{i,n-m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_i \\ \bar{z}_{i,n-m} + M_{n,n-m}^T M_{i,n-m}^{-1} (y_i - \bar{z}_{i,m}) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{i,n-m} - M_{i,n-m}^T M_{i,m}^{-1} M_{i,n-m} \end{bmatrix} \quad (13)$$

3 解析結果

一例として、波形の変形を考慮した際に観測点が増加することにより、特定の未観測点における波形がどれだけ真値と近づくかという問題を解析した。図1に示したものがその模式図であり、△印に示した場所が従来からの観測点であり、○印に示した場所が観測情報を増すために増設される観測点である。図1の左側から一様な波が入射した場合のそれぞれの点における厳密な波形を示したものが図2である。ここで●は未観測点において観測されるであろう真値を表わしている。一方逐次型シミュレーションを用いて推定した、同じ未観測点●での波形を図3に示した。既設の△印の点における観測値のみで内挿した波形と、○印の新設観測点をも含めての観測値から内挿した波形の2つを示した。相互相関関数は式(14)で与えられるものと仮定した。ここに α は変形定数、 c は地震波の見かけの波速、 x_0 は未観測点も含んだ点それぞれの間の距離である。これを用いて、厳密解は川上ら²⁾の方法を用いて求めた。この結果より観測点を増すことによって未観測点の波形は真の波形に近づいており、推定の信頼性が向上していることがわかる。

$$\rho_v(k) = R_{vv}(x_0, k) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{vv}(x_0, \omega) \cdot e^{-i\omega k} d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (a_i^2 + b_i^2) \cdot e^{-\alpha |k| + i\alpha(2\pi)} \cdot \cos \left\{ \omega_i \left(k - \frac{x_0}{c} \right) \right\} \quad (14)$$

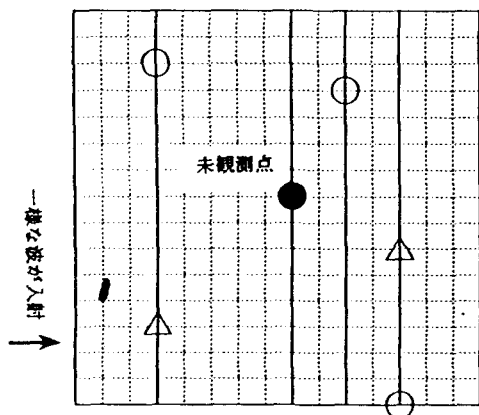


図1 解析の模式図

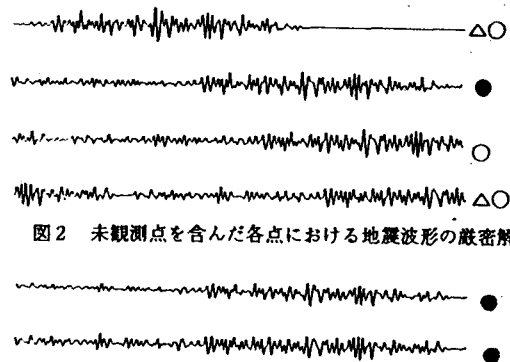


図2 未観測点を含んだ各点における地震波形の厳密解

図3 逐次型シミュレーションで求めた未観測点での推定波形
上：既設観測点から 下：新設、既設観測点から

- 参考文献 1) 加藤寛一郎：最適制御入門、東京大学出版会、pp.126-137
2) 川上英二、小野牧夫：土木学会論文集、No.411/I-18、pp167-175、1992