第III部門　　　鉛直アレー観測記録を利用した水平成層地盤の同定問題における解の一意性に関する考察

和歌山工業高等専門学校　正員 ○辻原　治
徳　島　　大　学　正員　沢田　勉

1．はじめに　各種振動系の同定問題に関しては多くの研究があるが、同定によって得られた解の一意性 (uniqueness) にまで言及した研究は少ない。これまで、せん断型多質点系モデルの同定問題については、得られた解の一意性について言及した研究がある [1][2] 。

本研究では、水平成層地盤（非減衰）を連続体としてモデル化し、周波数伝達関数を評価関数に用いた場合に推定された各層のＳ波速度の一意性を考察する。

2．水平成層地盤の同定問題の定式化　図－１に示すような水平成層地盤構造をもつモデル地盤において、鉛直下方からＳＨ波が入射することを仮定すると、重複反射理論より、第m層の上下の境界での変位とせん断応力は次式により関係づけられる [3] 。

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{m+1}(0) \\ \tau_{m+1}(0) \end{array} \right\} = [S_m] \left\{ \begin{array}{c} u_m(0) \\ \tau_m(0) \end{array} \right\} \tag{1}$$

ここに、

$$[S_m] = \left[\begin{array}{cc} \cos k_m H_m & \sin k_m H_m / G_m k_m \\ -G_m k_m \sin k_m H_m & \cos k_m H_m \end{array} \right] \tag{2}$$

$$k_m = \omega / V_m \quad , \quad G_m = \rho_m V_m^2$$

V_m, H_mおよびρ_mはそれぞれ第 m 層の、S 波速度，層厚および密度である。ω は円振動数である。ただし、式 (2) では、減衰は考慮していない。式 (1) は漸化式であるから、m を順次下げることによって地表面と第 m 層の境界面は次式で関係づけられる。

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{m+1}(0) \\ \tau_{m+1}(0) \end{array} \right\} = [R_m] \left\{ \begin{array}{c} u_1(0) \\ \tau_1(0) \end{array} \right\} \tag{3}$$

ここに、

$$[R_m] = [S_m][S_{m-1}] \cdots [S_1] \tag{4}$$

地表では、せん断応力がゼロ、すなわち、$\tau_1(0)$ であることから、式 (3) より次の関係が得られる。

$$u_{m+1}(0) = R_{m,11} u_1(0) \tag{5}$$

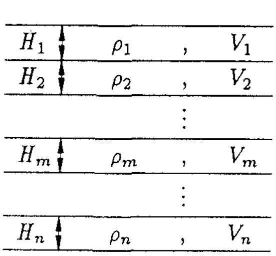
上式の $R_{m,11}$ は 2 × 2 行列 $[R_m]$ の第 1 行第 1 列の係数を表すものとする。

いま、第 n 層の下側境界面に対する第 m 層の下側境界面の周波数応答を周波数伝達関数 U とすると、円振動数ω について次式が得られる。

$$U(\omega) = \frac{u_m(H_m)}{u_n(H_n)} \tag{6}$$

同境界面において、地盤震動の同時観測記録が得られているものとすれば、地盤同定（層厚と密度を既知として、S 波速度を推定）に際して、次式を評価関数として、これを最小化することで、未知変数、すなわち、第 n 層までの各層の S 波速度を決定する方法が考えられる。

$$\lim_{\omega_u \to \infty} \int_0^{\omega_u} \{U(\omega) - \hat{U}(\omega)\}^2 d\omega \longrightarrow min \tag{7}$$



図－１　水平成層地盤モデル

ここに、$\hat{U}(\omega)$ は記録より得られた周波数伝達関数である。

以下では、２層からなる水平成層地盤（非減衰）において、得られた解の一意性について考察する。

３．２層地盤の同定における解の一意性

Osamu TSUJIHARA and Tsutomu SAWADA

[定理]　層厚 H_1, H_2 と密度 ρ_1, ρ_2 を既知とする2層地盤において、第2層の上下の境界の周波数伝達関数を式(7)に用いれば、V_1 と V_2 の推定値の一意性は保証される。

[証明]　第2層の上下の境界面の周波数伝達関数は、式(6)より、次式となる。

$$U(\omega) = \frac{u_1(H_1)}{u_2(H_2)} = \frac{R_{1,11}}{R_{2,11}} \tag{8}$$

式(2)〜(5)より、

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \frac{\cos k_1 H_1}{\cos k_1 H_1 \cos k_2 H_2 - (G_1 k_1 / G_2 k_2) \sin k_1 H_1 \sin k_2 H_2} \\ &= \frac{1}{\cos \frac{H_2}{V_2}\omega - (\rho_1 V_1/\rho_2 V_2) \tan \frac{H_1}{V_1}\omega \sin \frac{H_2}{V_2}\omega} \end{aligned} \tag{9}$$

上式に式(10)を代入すると、

$$\begin{cases} \cos \frac{H_2}{V_2}\omega = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{H_2}{V_2}\right)^2 \omega^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{H_2}{V_2}\right)^4 \omega^4 + \cdots \\ \sin \frac{H_2}{V_2}\omega = \frac{H_2}{V_2}\omega - \frac{1}{3!}\left(\frac{H_2}{V_2}\right)^3 \omega^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{H_2}{V_2}\right)^5 \omega^5 + \cdots \\ \tan \frac{H_1}{V_1}\omega = \frac{H_1}{V_1}\omega + \frac{1}{3}\left(\frac{H_1}{V_1}\right)^3 \omega^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{H_1}{V_1}\right)^5 \omega^5 + \cdots \qquad \left(\frac{H_1}{V_1}\omega < \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{10}$$

次式が得られる。

$$(U(\omega))^{-1} = 1 + \frac{\alpha}{V_2^2}\omega^2 + \left(\frac{\beta}{V_2^4} + \frac{\gamma}{V_2^2 V_1^2}\right)\omega^4 + \cdots \tag{11}$$

ここに、α, β, γ は次式で表される。

$$\begin{cases} \alpha = -\left(\frac{H_2^2}{2} + \frac{\rho_1 H_2 H_1}{\rho_2}\right) \\ \beta = \frac{H_2^4}{24} + \frac{\rho_1 H_2^3 H_1}{6\rho_2} \\ \gamma = -\frac{\rho_1 H_2 H_1^3}{3\rho_2} \end{cases} \tag{12}$$

いま、S波速度の2組の推定値 (V_1, V_2) と $(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$ が存在し、それらによる周波数伝達関数 $U(\omega)$ と $\tilde{U}(\omega)$ が等しくなると仮定すれば、次の関係が成り立たねばならない。

$$1 + \frac{\alpha}{V_2^2}\omega^2 + \left(\frac{\beta}{V_2^4} + \frac{\gamma}{V_2^2 V_1^2}\right)\omega^4 + \cdots = 1 + \frac{\alpha}{\tilde{V}_2^2}\omega^2 + \left(\frac{\beta}{\tilde{V}_2^4} + \frac{\gamma}{\tilde{V}_2^2 \tilde{V}_1^2}\right)\omega^4 + \cdots \tag{13}$$

上式は、ω に関する恒等式であるから、

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{V_2^2} = \frac{\alpha}{\tilde{V}_2^2} \\ \frac{\beta}{V_2^4} + \frac{\gamma}{V_2^2 V_1^2} = \frac{\beta}{\tilde{V}_2^4} + \frac{\gamma}{\tilde{V}_2^2 \tilde{V}_1^2} \\ \vdots \end{cases} \tag{14}$$

でなければならない。$V_1 > 0, V_2 > 0, \tilde{V}_1 > 0, \tilde{V}_2 > 0$ であることを考慮すれば、式(14)の第一式より、

$$V_2 = \tilde{V}_2 \tag{15}$$

この関係を式(14)の第二式に代入すると

$$V_1 = \tilde{V}_1 \tag{16}$$

が得られる。

参考文献

[1]Udwadia,et al.:Some Uniqueness Results Related to Building Structural Identification,SIAM J.Appl.Math,Vol.34,1978
[2]Beck:Determining Models of Structures from Earthquake Records,Thesis,California Institute of Technology,1978
[3] 土岐:新体系土木工学 11 構造物の耐震解析, 技報堂出版,1982