第Ⅲ部門

ひずみ空間塑性論に基づく粘土の弾塑性モデル

大阪大学工学部　正 会 員　○阿　部　信　晴
大阪大学大学院　学生会員　　橋　本　和　晃

1．まえがき

ひずみ空間における弾塑性理論はひずみ硬化，完全塑性，ひずみ軟化挙動を統一的に取り扱うことができ，地盤の変形解析を行う上で有利な定式化と思われるが，これまでの適用例は極めて少ない。ここでは応力空間からの変換により粘土のひずみ空間モデルを導き，その有用性を検討する。

2．ひずみ空間塑性論

ひずみ空間塑性論は，Naghdi and Trapp (1975), Yoder and Iwan (1981) らによって定式化されている。後者による定式化によれば材料の負荷関数Fはひずみ空間で次式で与えられる。

① $$F(\varepsilon_{ij},\ \varepsilon^p_{ij},\ \kappa)=0$$

そして，応力増分 $d\sigma_{ij}$ は弾性応力増分 $d\sigma^e_{ij}$ と塑性応力増分 $d\sigma^p_{ij}$ との差で与えられる。すなわち，

② $$d\sigma_{ij}=d\sigma^e_{ij}-d\sigma^p_{ij}$$

弾性応力増分は，

③ $$d\sigma^e_{ij}=D_{ijkl}\,d\varepsilon_{kl}$$

で定義され，
さらに，次の関係が成立するので，

④ $$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon^e_{ij}+d\varepsilon^p_{ij}$$

⑤ $$d\varepsilon^e_{ij}=C_{ijkl}\,d\sigma_{kl}$$

塑性応力増分は塑性ひずみ増分によって次のように表される。

⑥ $$d\sigma^p_{ij}=D_{ijkl}\,d\varepsilon^p_{kl}\quad (d\varepsilon^p_{ij}=C_{ijkl}\,d\sigma^p_{kl})$$

一方，I'lushinの仮説からひずみ空間における関連流動則が成立する。

⑦ $$d\sigma^p_{ij}=\lambda\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

⑦式中のスカラーパラメータλは，負荷関数Fに対する適応の条件から求められる。

⑧ $$dF=\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}+\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p_{ij}}d\varepsilon^p_{ij}+\frac{\partial F}{\partial \kappa}d\kappa=0$$

$$=\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}+\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p_{ij}}+\frac{\partial F}{\partial \kappa}\frac{\kappa}{\partial \varepsilon^p_{ij}}\right)C_{ijkl}\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}}$$

$$=\hat{F}-\lambda H=0$$

すなわち，

⑨ $$\lambda=\frac{\hat{F}}{H}\ ,\quad H\geqq 0$$

ひずみ空間モデルの応力～ひずみの増分関係および負荷基準は，

⑩ $$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}\,d\varepsilon_{kl}-\frac{\hat{F}}{H}\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$=\left[D_{ijkl}-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}}}{H}\right]d\varepsilon_{kl}$$

⑪ $$d\sigma^p_{ij}=\begin{cases}0 & F<0 \text{ or } F=0,\ \hat{F}\leqq 0\\ \dfrac{\hat{F}}{H}\dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} & F=0,\ \hat{F}>0\end{cases}$$

となる。これらはひずみ硬化，完全塑性，ひずみ軟化について成立する。

3．ひずみ空間における粘土の弾塑性モデル

ひずみ空間における弾塑性モデルを構築するためには，ひずみを変数とする負荷関数を導くことが必要である。しかし，実験結果からひずみ空間における負荷関数を定めることは現状ではむずかしく，ひずみ空間塑性論が一般化しない理由はこの点にあるものと思われる。したがって，ここでは応力空間で定義されている負荷関数をひずみ空間に変換する方法によりひずみ空間モデルを導く。

この方法は，応力空間において定義されているモデルの負荷関数

⑫ $$F^*(\sigma_{ij},\ \varepsilon^p_{ij},\ \kappa)=0$$

を次式により変数を応力からひずみに変換する。

⑬ $$\sigma_{ij}=\sigma_{ij0}+D_{ijkl}\,\varepsilon^e_{kl}=\sigma_{ij0}+D_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\varepsilon^p_{kl})$$

⑬式を⑫式に代入して，

⑭ $$F^*=F^*\{\sigma_{ij0}+D_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\varepsilon^p_{kl}),\ \varepsilon^p_{ij},\ \kappa\}$$

$$=F\{\varepsilon_{ij},\ \varepsilon^p_{ij},\ \kappa\}=0$$

この手法により，カムクレイモデルをひずみ空間モデルに変換する。カムクレイモデルの降伏関数（負

Nobuharu Abe and Kazuaki Hashimoto (Osaka University)

荷関数）は，

⑮ $$f^{*}=p\ \exp\left(\frac{\eta-\eta_{o}}{M}\right)-p_{v}=0$$

⑮式に次式の変換式を用いると，

⑯ $$p=p_{o}+K(v-v^{p})\ ,\quad q=q_{o}+3G(\gamma-\gamma^{p})$$

ひずみ空間におけるカムクレイモデルの負荷関数は，

⑰ $$f=\{p_{o}+K(v-v^{p})\}\times \exp\left[\frac{1}{M}\left\{\frac{q_{o}+3G(\gamma-\gamma^{p})}{p_{o}+K(v-v^{p})}-\frac{q_{o}}{p_{o}}\right\}\right]-p_{v}=0$$

適応の条件から，

⑱ $$\lambda=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}dv+\dfrac{\partial f}{\partial \gamma}d\gamma}{H}=\frac{\hat{f}}{H}$$

⑲ $$H=-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial v^{p}}\frac{1}{K}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial \gamma^{p}}\frac{1}{3G}\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial p_{v}}\frac{\partial p_{v}}{\partial v^{p}}\frac{1}{K}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial p_{v}}\frac{\partial p_{v}}{\partial \gamma^{p}}\frac{1}{3G}\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right)\right]$$

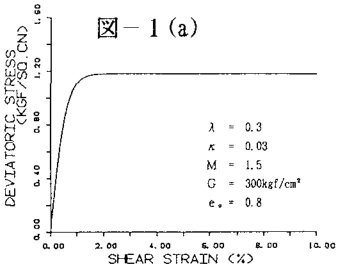
応力－ひずみの増分関係は，

⑳ $$\begin{pmatrix} dp \\ dq \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} K-\dfrac{f_{v}f_{v}}{H} & -\dfrac{f_{\gamma}f_{v}}{H} \\ -\dfrac{f_{v}f_{\gamma}}{H} & 3G-\dfrac{f_{\gamma}f_{\gamma}}{H} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dv \\ d\gamma \end{pmatrix}$$

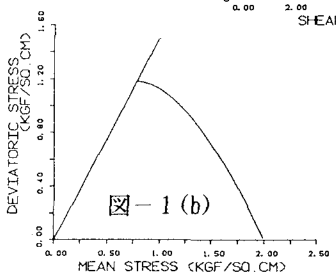
カムクレイモデルの硬化変数は，

㉑ $$p_{v}=p_{o}\exp\left[\left(\frac{1+e_{o}}{\lambda-\kappa}\right)v^{p}\right]$$

㉑式と⑰式の負荷関数を用いて計算したひずみ制御非排水三軸圧縮試験の応力－ひずみ関係，有効応力経路が図－1(a)，(b)である。これはひずみ空間における定式化によるひずみ硬化／完全塑性応答の計算結果である。



図－1(a)

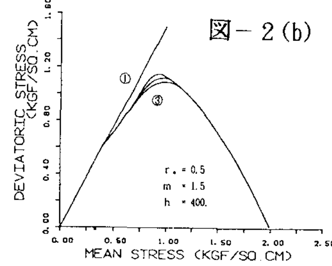


図－1(b)

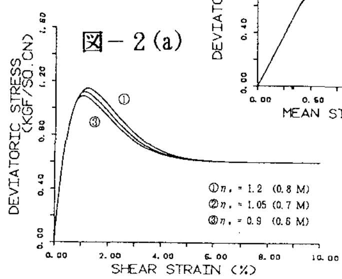
ひずみ硬化／ひずみ軟化挙動を表現するために硬化変数を次式で与える。

㉒ $$p_{v}=p_{o}\exp\left[\left(\frac{1+e_{o}}{\lambda-\kappa}\right)v^{p}\right]\times\left[r_{u}+(1-r_{u})\exp(-h\langle\gamma^{p}-k\rangle^{m})\right]$$

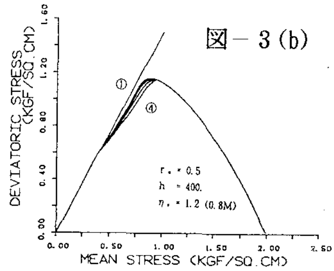
r_u，h，mは軟化特性を規定する定数であり，kは軟化が生じ始める時の塑性せん断ひずみである。図－2(a)，(b)，図－3(a)，(b)は，㉒式を用いたひずみ硬化／ひずみ軟化応答の計算結果である。この計算ではひずみ軟化は応力比がη_sに達したときに始まるとしている。図から明らかなように，ひずみ空間での定式化を用いることにより安定なひずみ軟化計算が可能である。



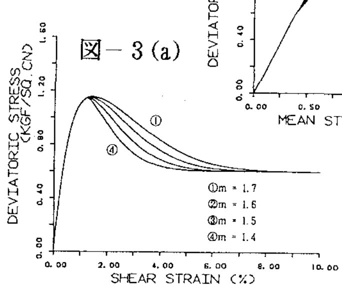
図－2(b)



図－2(a)



図－3(b)



図－3(a)

【参考文献】

(1)P.M.Naghdi & J.A.Trapp: The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surface in strain space, Int. J. Eng. Sci. 13, 785-797 (1975). (2)P.J.Yoder & W.D.Iwan: On the formulation of strain-space plasticity with multiple loading surfaces, ASME, J. Appl. Mech. Vol.48, 773-778(1981).