

京都大学 正 員 田村 武
京都大学 学生員 ○ 斉藤 恭之

1. はじめに

最適設計は、土木構造物を考えるうえで、非常に興味深く重要な課題の1つである。本論文では、弾性体の形状最適化を有限要素法を用いて行う。具体的には、等体積条件のもとで外力仕事（コンプライアンス）を最小とするような形状を求める。すなわち変分法により導いた最適形状の必要条件（オイラーの方程式）を有限要素法を用いて数値解析的に解く。これにより、常に等体積条件を満足させながら、コンプライアンスが最小となる形状が求められる。例として片持ち梁や簡単な不静定構造物を取りあげ、数値解析を行いこの解析手法が有効に働くかを評価する。

2. 解析の手法^[1]

構造物の最適形状については、様々な問題の設定方法がある。本論文では、与えられた外力に対して、外力仕事が最小となるような形状、すなわち、コンプライアンスを最小とする形状を考える。構造物になされる外力仕事は、ひずみエネルギーとして内部にたくわえられる。つまり、 $\min(\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV)$ （ひずみエネルギー最小）を $V = V_0$ （等体積条件）と以下の内部と境界のつりあい式の下で解くことになる。

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{in } S_\sigma \quad (2)$$

ここで、 σ_{ij} は応力、 ϵ_{ij} はひずみ、 f_i は物体力、 u_i は変位、 T_i は表面力である。
全ポテンシャル・エネルギー：

$$I = \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - f_i u_i \right) dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i dS \quad (3)$$

を用いれば上記の問題は

$$\text{Max}_{S_X} (\min_{u_i} I) \quad \text{sub to } V = V_0 \quad (4)$$

と等価である。

なぜなら I を先に最小化するためには、(1)、(2) が必要条件となり、そのときの I の値は負のコンプライアンスとなるからである。

しかし、本論文では $\max \min I$ を ϕ と ψ （領域と変位）を同時に変動させて解くこととする。そうすると、必要条件として (1)、(2) のつりあい式のほか

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - f_i u_i = \lambda \quad (\text{constant}) \quad \text{on } S_X \quad (5)$$

が、3本目のオイラーの式として求められる。

結局、等面積条件を保ちながら、この式を有限要素法により解く。

以上の理論により作成したプログラムを用いて収束計算させながら最適な形状を求めた。

3. 解析結果

・片持ちばり

図1に10要素の片持ちばりの解析結果を示す。細線はFEM計算値、太線は構造力学による理論値で、端点に荷重1、モーメント1をかけている。また、はりの初期形状は長方形であり、下端部のみ形状

Takeshi TAMURA, Takayuki SAITO

を変動させている。計算値と理論値は、端点で多少のずれはあるが、ほぼ一致している。これらは要素数を多くすればするほど一致する。また (5) 式から最適形状に近くなると (物体力がないとき) ひずみエネルギーは一様になることがわかるので、図 2 に各要素の下端部中央のひずみエネルギーの分布を示す。

・不静定ばり

次に 3 径間連続ばり (真中を固定) を解析した。図 3 に形状、ひずみエネルギー分布を示す。形状を見ると荷重直下やモーメントが大きいところではりの高さが大きくなり、ひずみエネルギーはほぼ一様になっていることがわかる。

4. 結論

静定構造物では端点では多少のずれはあるが、要素数を増加させれば、理論値と一致するのでこの解析方法は有効に働くとと思われる。

不静定構造物では、モーメントが 0 になるところの処理に工夫したが、まだどんな荷重に対しても対応できるプログラムには至っていない。

今後の課題としては、作成したプログラムに工夫を重ね、解析例を増やし汎用性のあるプログラムをめざす。

《参考文献》

- [1] T.Tamura:A FUNDAMENTAL STUDY ON SHAPE OPTIMIZATION OF CONTINUUM,
Proc. Korea-Japan Joint Seminar, PP.119-127,1992

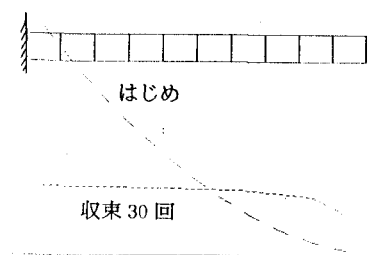
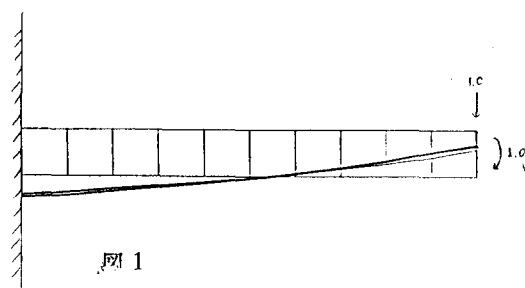


図 2 片持ちばりのひずみエネルギー分布図

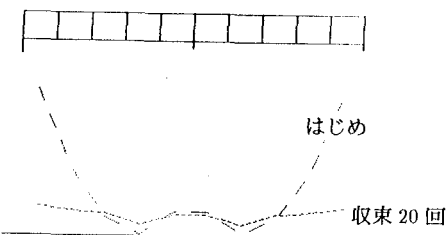
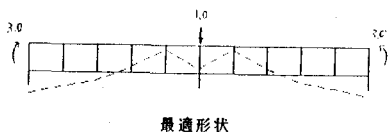


図 3 ひずみエネルギー分布図