

定常緩勾配方程式の近似解法について

大阪工業大学 後野正雄

まえがき: 緩勾配方程式は波の浅水変形、屈折、回折、反射の全ての変形を表現できる優れた方程式であるが、現在のところ緩勾配方程式を解くためには有限要素法以外に適当な方法がない。反射を無視した場合には放物型方程式と呼ばれる解法があるが、波向きが大きく変化する場合には精度が落ちる等の問題がある。一方、線水変形と屈折だけを考慮する場合には、エネルギー保存に基づく式を用いた格子点法と呼ばれる簡便な計算手法がある。本研究は、反射を無視した場合において、エネルギー保存の形式で表した緩勾配方程式を格子点法と同様な方法で近似的に解く手法について考察したものである。

エネルギー保存型の緩勾配方程式: 緩勾配方程式は位相関数 S を導入することによって次のようなエネルギー保存の形式に変形される。

$$\nabla \cdot (C C g A^2 K) = 0 \quad (1)$$

$$(\lambda^2 - k^2) C C g A + \nabla \cdot (C C g \nabla A) = 0 \quad (2)$$

$$k = |K| = \nabla S, \quad \sigma = -\partial S / \partial t, \quad \sigma^2 = g \lambda \tanh \lambda d$$

ここで、 A ; 速度ポテンシャルの振幅、 σ ; 角周波数、 K ; 波数ベクトル、 k ; K の絶対値、 λ ; 固有値、 C , $C g$; λ による波速、群速度、 d ; 水深である。さらに、 $\beta^2 = C C g A^2$ なる変数を用いると (1) (2) 式は水底勾配の2乗のオーダーの誤差範囲内で (3) (4) 式のように変形できる。

$$\nabla \cdot (\beta^2 K) = 0 \quad (3)$$

$$\lambda^2 - k^2 + \nabla^2 \beta / \beta = 0 \quad (4)$$

(3) 式はエネルギー保存を表す式であり、これと波の非回転を表す式を用いてエネルギーを求める方法が格子点法と呼ばれる方法である。本研究では、波数ベクトルを求めるために次に述べる波数の保存式を用いる。波数の非回転性は本研究では計算には用いない。

定常波数保存式: 定常状態での波数の保存式は、周期が一定であることを表す次式である。

$$\nabla \sigma = 0 \quad (5)$$

分散関係式より、 σ は水深 d と固有値 λ の関数であるので、 $\nabla \sigma$ は次のように書ける。

$$\nabla \sigma = \partial \sigma / \partial \lambda \nabla \lambda + \partial \sigma / \partial d \nabla d \quad (6)$$

$$= C g \nabla \lambda + \sigma (2n - 1) \nabla d / d$$

さらに、 $\nabla \lambda$ に (4) 式を代入し、波数の非回転性を用いると、最終的に次のように変形できる。

$$(\nabla K) \cdot K - \nabla (\nabla^2 \beta / 2 \beta) + P(\lambda, d) \nabla d = 0 \quad (7)$$

$$P(\lambda, d) = \lambda^2 (2n - 1) / (2nd), \quad n = C g / C$$

(7) 式はベクトル式であり、波数ベクトルの成分 $K = (K_x, K_y)$ のそれぞれについて解くことができる。これは、波数の非回転の式を用いて $|K| = \lambda$ と仮定し、波向きの角度だけを解く格子点法と大きく異なり、(7) 式を用いて求めた波数ベクトルの絶対値 $|K|$ は λ とは一致するとは限らない。これが本計算手法と従来の格子点法との最大の違いである。

数値計算手法: 計算の基本的なアルゴリズムは次のとおりである。(a) (7) 式の第2項を無視して波数ベクトルを求める。(b) (3) 式を解き、 β を求める。(c) $\nabla^2 \beta / \beta$ を計算する。このとき β の5点平均した値を用いた。これは(7)式第2項が3階の微分値であり、微小な変動が大きく影響するからである。(d) 第2項を考慮した(7)式を解き、新たな波数ベクトルを求める。

(e) 新しい波数ベクトルを用いて、再び(3)式を β について解く。厳密な解を求めるためには(c)以下の過程を変数が収束するまで繰り返す必要がある。しかし、本研究ではこの繰り返しの1回限りとした。これは、繰り返しを行っていくと、波向きが沖向きに変化したり、 β^2 が負になる等の現実にはありえない解が出てしまうからである。この原因については現在のところ不明である。なお差分の手法としては、(3)式はLax法を、(7)式においてはMacCormack法を改良して用いた。Lax法、MacCormack法は本来非定常な保存式に用いられるものであるが、ここでは主に y 軸の負の方向に進む波を対象とし、 y 軸を時間軸のように取り扱ったものである。

Masao NOCHINO

数値計算結果:計算はBercoff et.al.が行った水槽実験に対して実施した。図 - 1 は実験の概要と計測された断面を示したもので、参考のために示した。図 - 2 ~ 図 - 4 はBercoff らの実験、計算結果と本計算手法による結果を示したもので、それぞれ図 - 1 中の⑤⑥⑦で示される断面での波高比を表したものである。図中の●, △, × はそれぞれBercoff et.al.による実験値, FEMの解、放物型方程式の解であり、○-○は本計算手法によるものである。煩雑になるので必ずしも全ての記号を示してはいない。図 - 2、4 より、本計算結果は波向きが集中し、波高が増大する部分においては実験結果と良く一致していることが分かる。しかし、図 - 3 に見られるように波高が小さくなる部分は精度良く計算できているとは言えない。

参考文献: Bercoff, J.C.W., Booy, N., and Radder, A.C.: Verification of Numerical Wave Propagation Models for Simple Harmonic Liner Water Waves, Coastal Eng., vol.6, pp255-279, 1982

Lax, P.D.: Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation, Communications on Pure and Applied Math., vol.9, pp.1747-1757, 1954

MacCormack, R.W.: The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Creating, AIAA Paper No.69-354, 1969

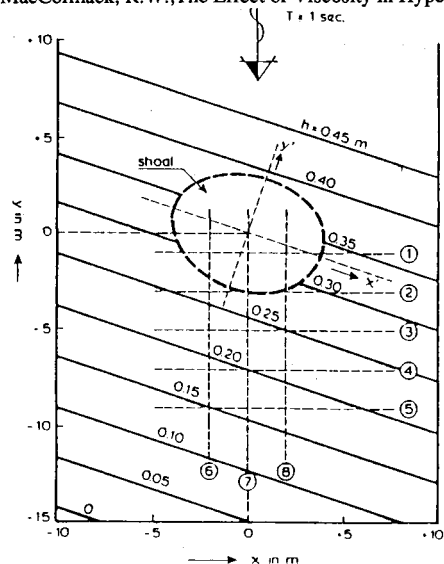


図 - 1 Bercoff らの実験状況

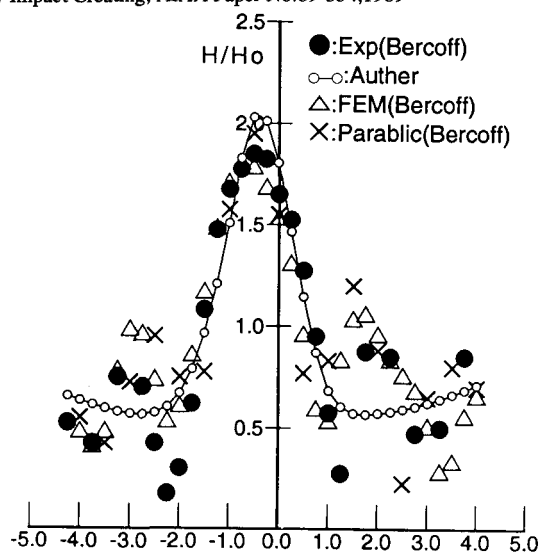


図 - 2 断面⑤ (Y=-7.0m) の波高分布 X (m)

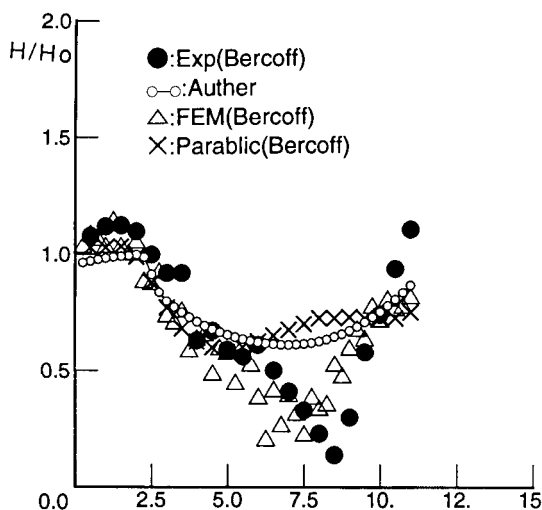


図 - 3 断面⑥ (X=-2.0m) の波高分布 -Y (m)

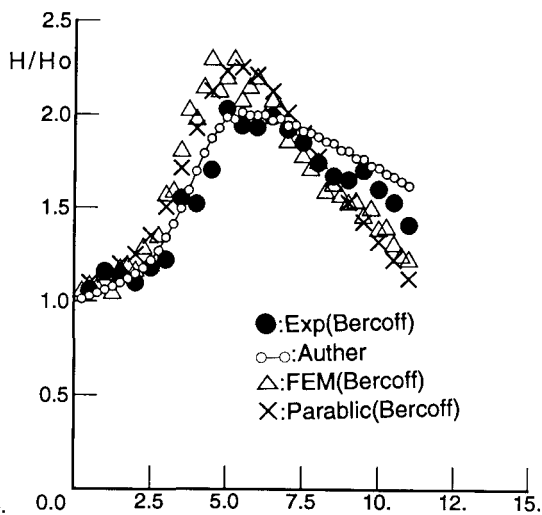


図 - 4 断面⑦ (X=0.0m) の波高分布 -Y (m)