

衝撃波を伴う高速湾曲流に関する一考察

電力中央研究所 正 員 〇米山 望
 京都大学工学部 正 員 細田 尚
 京都大学大学院 学生員 森 茂

1.はじめに；本研究は、衝撃波を伴う湾曲水路の高速流の数値解析法について考察し、各種断面をもつ水路の流れに適用し水面形の再現を試みたものである。断面形としては、長方形、台形および円形を取り上げた。

2.基礎式；定常状態における平面2次元流れの基礎式を用いる。

図-1に示す円筒座標系を用いて、次のように行列表示される。

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial r} + A_2 \frac{\partial U}{r \partial \theta} = B \quad (1)$$

上式において、 U, A_1, A_2, B は、以下のように定義される。

$$U = \begin{pmatrix} h \\ u \\ w \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} rv_\theta & rh & 0 \\ g & v_\theta & 0 \\ 0 & 0 & v_r \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} rv_\theta & 0 & rh \\ 0 & v_\theta & 0 \\ g & 0 & v_\theta \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -v_r h \\ v_\theta^2/r - \tau_{rr}/\rho h - g(\partial y_b/\partial r) \\ -v_r v_\theta/r - \tau_{\theta\theta}/\rho h - g(\partial y_b/r \partial \theta) \end{pmatrix}$$

ここに、 h ；水深、 v_r, v_θ ；水深平均流速ベクトルの r, θ 方向成分、 $\tau_{rr}, \tau_{\theta\theta}$ ；水路床に作用する応力ベクトルの r, θ 方向成分、 y_b ；基準面からの路床高さ、 ρ ；密度、 g ；重力加速度である。

(1) 式の特性曲線 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は、 $A_2^{-1}A_1$ の固有値であり次式のようになる。

$$\lambda_1; \frac{dr}{rd\theta} = \frac{v_r}{v_\theta} \quad \lambda_2, \lambda_3; \frac{dr}{rd\theta} = \frac{v_r v_\theta \pm \sqrt{gh(v_r^2 + v_\theta^2 - gh)}}{v_\theta^2 - gh} \quad (+; \lambda_2, -; \lambda_3) \quad (2)$$

また、 λ_i ($i=1,2,3$)の左固有ベクトルを μ_i とし、(1)式に左から $\mu_i A_2^{-1}$ を乗ずれば、以下の特性曲線上の関係式が得られる。

$$\mu_i (A_2^{-1} A_1 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{r \partial \theta}) = \mu_i (\lambda_i \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{r \partial \theta}) = \mu_i A_2^{-1} B \quad (i=1,2,3) \quad (3)$$

衝撃波が存在しない場合は、(3)式を適当に離散化して上流から下流に向かって水量を計算することができる[1]。

3. 衝撃波の取り扱い；基礎式を衝撃波を含む領域で積分すると、良く知られた衝撃波上下流の水量の関係式が得られる。

$$(hV_n)_u = (hV_n)_d, (hV_n^2 + gh^2/2)_u = (hV_n^2 + gh^2/2)_d, (V_t)_u = (V_t)_d \quad (4)$$

ここに、添え字 u, d は、衝撃波の上流側および下流側の水量であることを示し、 V_n, V_t は、流速の衝撃波に対して垂直および平行な成分である。

図-2の衝撃波上の点Pの水量は次のようにして求められる。点Pの上流側の値は、3種の特性曲線($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$)の関係式から求められる。衝撃波を挟んだ下流側の値と衝撃波角 β は、上流側の値を(4)式に代入した3通りの関係式と下流側の λ_∞ 上の関係式を用いて、原理的には求めることができる。

4. 数値解析法；数値解析は、(3)式の離散式に上述した衝撃波の取り扱いを組み込んで、上流から下流に向かって行われる。まず、図-3中の内部点Pの水量は、(3)式を離散化した次式で求められる。

$$\lambda_i; (\mu_i)_\Delta \left(\frac{U_P - U_\Delta}{r \Delta \theta} \right) = (\mu_i A_2^{-1} B)_\Delta \quad (i=1,2,3) \quad (5)$$

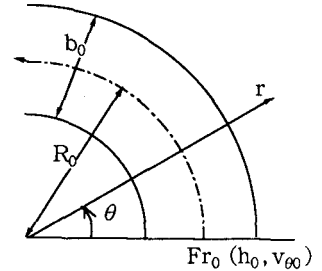


図1 座標系

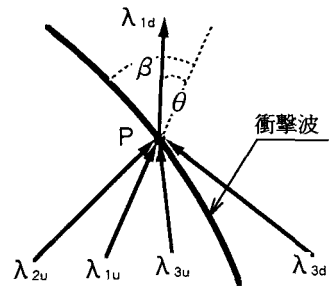


図2 衝撃波の伝播

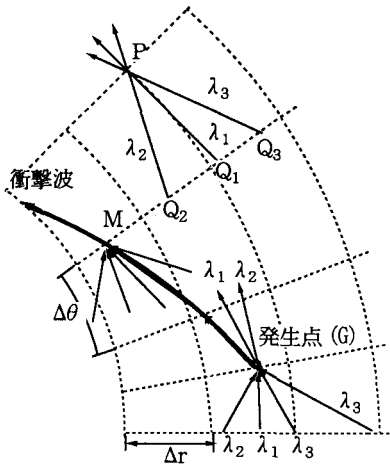


図-3 計算の説明

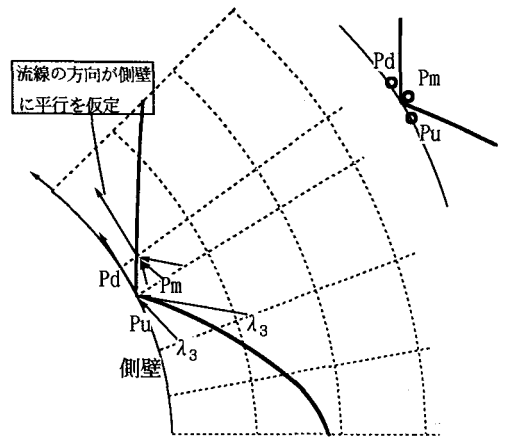


図-4 衝撃波の反射の計算法

ただし、 Q_i の位置および水理量は線形補間によって求めた。

衝撃波の発生点 G は、格子点から出る同種の特異曲線の交点として求められる。点 G の水理量と衝撃波角は 3. で説明した方法で求められ、この衝撃波角を用いて下流の衝撃波の位置が決められる。伝播中の衝撃波上の点 M の水理量も同様に計算される。側壁に到達した衝撃波の反射過程の計算法の説明を図-4 に示した。

台形および円形断面の場合の水際線の取り扱い、参考文献 [1] に従った。

5. 計算結果の考察； 上述した解析法を、長方形、台形および円形断面の湾曲水路の高速流に適用した。計算の条件は、水路上流端で水深と流速を与えた。また、底面せん断応力はマニング則で評価した。(粗度係数 $n = 0.01$ とし、路床の θ 方向の勾配を上流端水深が等流水深になるように定めた。)

計算結果より得られた水深の横断分布を図-5 に示した。これらの図から、衝撃波の発生、伝播および反射の様子が再現されている。

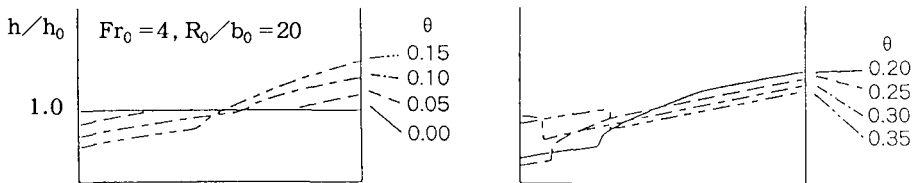


図-5 水深の横断分布 (長方形断面の場合)

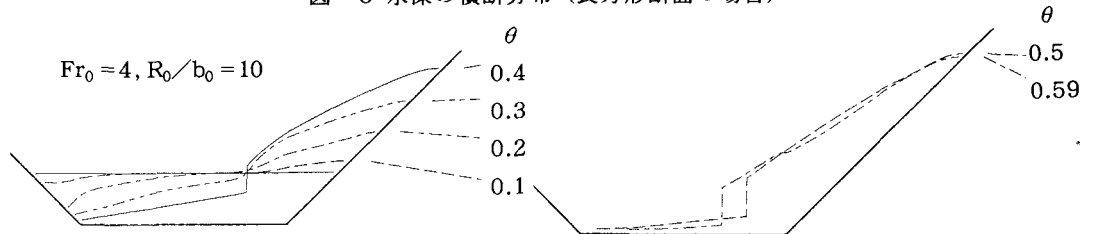


図-6 水深の横断分布 (台形断面の場合)

参考文献 [1] 岩佐・細田・河村・米山：高速流における水際線の取扱いとその適用について，水工学論文集第35巻，1991。