

周期的なせん断力を受ける板の大たわみを考慮した動的弾性応答解析

関西大学工学部 正会員 米澤 博
 関西大学工学部 正会員 堂垣正博
 (株)ニュージェック 正会員 〇白 星保

1. まえがき 長方形板が周期的に変化する面内力を受けると、その振幅が静的座屈荷重よりかなり小さな値であっても励振振動数の値によっては板は曲げ振動し、不安定な状態に陥る。この現象は係数励振振動あるいは動座屈として知られている。板の係数励振振動を微小振動理論に基づいて解析すれば、板が動的に不安定な状態に至るとともに、その振幅は次第に増幅され、たわみが発散するようになる。しかし、たわみが大きくなれば、膜作用が強く働くようになり、たわみは決して発散しなくなる。このような挙動を明らかにしようと思えば、幾何学的非線形性を考慮した有限変位理論に基づく必要がある。変動軸力や面内変動曲げを受ける長方形板の動的安定性に関する研究はなされているが、せん断力が作用する長方形板を対象とした研究はあまりなされていない。ここでは初期たわみを有し、周期的に変化するせん断力が作用する長方形板を対象に、幾何学的非線形性を考慮した動的応答解析を行い、その係数励振振動を明らかにする。数値解析に差分法とNewmarkの β 法を用い、多元連立代数方程式を修正Newton-Raphson法で解く。

2. 板の動的応答解析の基礎式 Fig. 1に示すような周辺単純支持され、初期たわみ $[w_0 = w_{0\max} \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)]$ を有する長方形板(長さ a 、幅 b 、板厚 h)を対象に、周期的に変化するように y 方向の変位 $v = \bar{v}(v_0 + v_1 \sin \theta t)$ $[v_0, v_1$ はそれぞれ静的な変位と周期的な変位の振幅、 θ は励振振動数]がその端部に生じる場合の非線形動的応答を明らかにする。ただし、減衰作用は無視する。

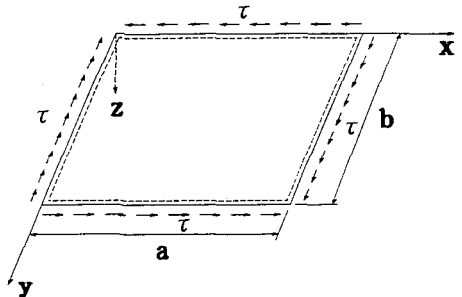


Fig. 1

(1) 運動方程式: 初期たわみを有する薄板が周期的な面内力を受けて係数励振振動する場合、大たわみを考慮した平板の運動方程式は静的有限変位問題におけるMarguerreの非線形つり合い式に慣性項を加味することによって得られる。すなわち x, y および z 方向の運動方程式は

$$u_{,xx} + (1-\nu)u_{,yy}/2 + (1+\nu)v_{,xy}/2 + \bar{w}_{,x}\bar{w}_{,xx} + (1+\nu)\bar{w}_{,y}\bar{w}_{,xy}/2 + (1-\nu)\bar{w}_{,x}\bar{w}_{,yy}/2 - w_{0,x}w_{0,xx} - (1+\nu)w_{0,y}w_{0,xy}/2 - (1-\nu)w_{0,x}w_{0,yy}/2 - \rho h u_{,tt}/B = 0 \quad (1)$$

$$(1+\nu)u_{,xy}/2 + (1-\nu)v_{,xx}/2 + v_{,yy} + \bar{w}_{,y}\bar{w}_{,yy} + (1+\nu)\bar{w}_{,x}\bar{w}_{,xy}/2 + (1-\nu)\bar{w}_{,y}\bar{w}_{,xx}/2 - w_{0,y}w_{0,yy} - (1+\nu)w_{0,x}w_{0,xy}/2 - (1-\nu)w_{0,y}w_{0,xx}/2 - \rho h v_{,tt}/B = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \bar{w}_{,xxxx} + 2\bar{w}_{,xxyy} + \bar{w}_{,yyyy} - w_{0,xxxx} - 2w_{0,xxxy} - w_{0,yyyy} \\ & - (B/D)\bar{w}_{,xx} [u_{,x} + (\bar{w}_{,x}^2 - w_{0,x}^2)/2 + \nu \{ v_{,y} + (\bar{w}_{,y}^2 - w_{0,y}^2)/2 \}] \\ & - (B/D)\bar{w}_{,yy} [\nu \{ u_{,x} + (\bar{w}_{,x}^2 - w_{0,x}^2)/2 \} + v_{,y} + (\bar{w}_{,y}^2 - w_{0,y}^2)/2] \\ & - (1-\nu)(B/D)\bar{w}_{,xy} (u_{,y} + v_{,x} + \bar{w}_{,x}\bar{w}_{,y} - w_{0,x}w_{0,y}) \\ & - \rho h (\bar{w}_{,xu,tt} + \bar{w}_{,yv,tt} - \bar{w}_{,tt} + w_{0,tt})/D = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

となる。ここに u, v はそれぞれ x および y 方向の変位、 $\bar{w}$ は初期たわみ w_0 と荷重による付加たわみ w の和である。 B と D はそれぞれ板の伸び剛さと曲げ剛さ、 ν はポアソン比、 ρ は密度である。また、コンマに続く下添字はそれに関する偏微分を表す。

Hiroshi YONEZAWA, Masahiro DOGAKI and PEK Songbo

(2) 境界条件：周辺単純支持された板の $x=0$ および a 辺で周期的に変化する y 方向変位 v が生じ、板は x 方向に変位拘束されているものとすれば

$$u = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$v = \bar{v}(v_0 + v_1 \sin \theta t) \quad \dots\dots\dots (5)$$

また、 $y=0$ および b 辺では x 方向に変位せず、辺に垂直な方向の膜力 N_y が生じないものとすれば

$$u = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\nu \{u_{,x} + (W_{,x}^2 - w_{0,x}^2)/2\} + v_{,y} + (W_{,y}^2 - w_{0,y}^2)/2 = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

3. 数値解析法 幾何学的非線形性が考慮された板の運動方程式(1)～(3)を境界条件式(4)～(7)のもとに解くことになるが、その厳密解を求めることは極めて困難である。ここでは差分法とNewmark の β 法 ($\beta=1/4$) を適用し、近似的に解くことにする。任意の時刻 t に対して得られた多元連立の非線形代数方程式を修正 Newton-Raphson法で解く。なお、諸式を無次元化し、解析結果が広範な板に適用可能なようにした。

4. 数値解析結果 周期的なせん断力が作用する長方形板の動的応答をシミュレーション解析によって明らかにする。十分な精度の解を得るため、差分分割数と静的耐荷力の関係を調べたところ、板をそれぞれ x および y 方向に16分割すれば精度のよい解の得られることが分かった。なお、直接時間積分に必要な微小時間間隔 Δt を励振力の周期の $1/12$ 、ヤング率 $E=2.1 \times 10^8 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。なお、係数励振振動には、単一の固有振動モードに対応した単純共振と異なった2つの固有振動モードの結合に対応する結合共振がある。ここではせん断力を受ける長方形板の弾性座屈の変形モードを勘案し、 x および y 方向にそれぞれ半波および一波の異なった固有振動モードの結合からなる共振現象を明らかにする。

まず始めに、微小変位および有限変位の振動理論による応答の違いを明らかにするため、幅厚比 $b/h=100$ 、初期たわみ $w_{0,max}/h=0.1$ の正方形板に周期的な強制変位 $V_1=0.4$ (静的座屈荷重の約0.6 倍に相当する) が作用し、励振円振動数と固有円振動数の比が $\theta/\omega=1$ の場合の両理論による板中央のたわみの応答曲線を示すと、Fig. 2 が得られる。ただし、縦軸と横軸はそれぞれ板厚で無次元化された板中央のたわみと周辺単純支持された正方形板の基本固有振動周期で無次元化された時間を示す。また $\omega=\omega_{11}+\omega_{22}$ で、 ω_{11} と ω_{22} は1次および3次の固有円振動数である。図から明らかなように、微小変位理論に基づく、振幅は時間とともに増大し、板は発散振動を呈するようになる。一方、有限変位理論による場合、板は共振現象を呈するが、微小振動のように発散せず、たわみの応答曲線にはうなりが現れるようになる。これはたわみの増大に伴って板の中立面に変形を抑制しようとする膜作用が強く働くようになるからである。

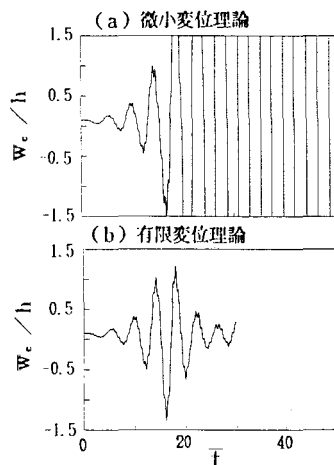


Fig. 2

次に、周期的なせん断力の振動数を種々変化させ、それぞれの応答時の最大および最小の振幅を求めた。励振振動数と最大および最小の振幅の関係はFig. 3 のようになる。図から明らかなように、微小変位解析の場合、 $\theta/\omega=0.5$ 、1の近傍でたわみが急増し、板のたわみは無限大に発散する。一方、有限変位理論による場合、 $\theta/\omega=1$ でたわみの増加が認められる。 $\theta/\omega=0.5$ でも若干の増加がみられるが、有限な量に抑えられるようになる。

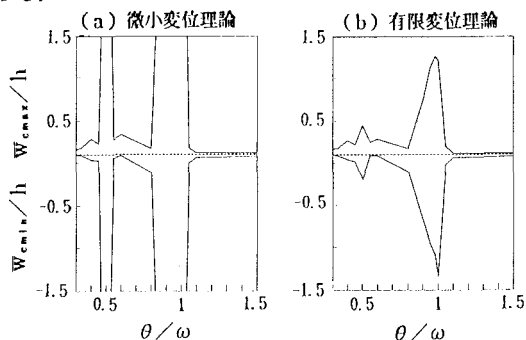


Fig. 3

なお、他の結果については講演会当日発表する。