

条件付確率場の理論

京都大学大学院 学生員 ○盛川 仁
 京都大学防災研究所 正 員 亀田弘行

1. はじめに

設計のための入力として、観測された波形を含む波動場を利用したり、観測された波形を基に波動場を推定して被害状況を把握するといった問題 [1] は、ある特定の地点で確定的に与えられた波形を条件とする条件付確率場の問題として取り扱うことができる。このような問題に関する研究の多くは kriging を応用した一種の最適内挿法を用いている [2] が、本研究では確率過程論によって条件付確率場の理論体系を記述する。さらにこれを基にして工学的に重要と考えられる初通過問題への応用を示す。

2. 条件付確率場の理論

空間・時間に関する多次元の条件付確率場の問題を、クロススペクトルを導入することにより空間軸方向に離散的な 1 次元多変数の問題に置き換えて考える。これは 1 次元 1 変数の場合 [3,4] からの拡張として扱うことができる。

実際の波動を扱うには non-stationary, non-homogenous な場を扱わなくてはならないが、研究の第一段階として次のような仮定をおいている。(i) 全ての確率波は平均値 0 の定常正規過程である。(ii) 全ての地点間のクロススペクトルと、全ての地点におけるパワースペクトルが与えられている。(iii) 確定波は (i), (ii) を満たす確率波の実現値の一つとみなされる。

$n-m$ 個の確定波 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_{n-m}(t)$ が与えられているという条件のもとで、推定される m 個の確率波 $U_j(t | u_i(t); i=1, \dots, n-m; j=n-m+1, \dots, n)$ は、

$$U_j(t | u_i(t); i=1, \dots, n-m) = \sum_k (A_{jk} \cos \omega_k t + B_{jk} \sin \omega_k t) ; j=n-m+1, \dots, n \quad (1)$$

と表されるものとする（以下では簡単に $U_j(t)$ と書く）。ここで A_{jk}, B_{jk} は振動数 ω_k におけるフーリエ係数である。このとき振動数ごとに与えられる共分散行列を用いて $A_{n-m+1, k}, B_{n-m+1, k}, \dots, A_{nk}, B_{nk}$ に関する $2m$ 次元の条件付確率密度関数が求められる。これより互いに相関を持つ確率波をシミュレートするためには次のようにして $A_{jk}, B_{jk} (\forall j, k)$ に関する条件付確率密度関数を求めていく。

まず、 $u_i(t); i=1, \dots, n-m$ を条件とする $U_{n-m+1}(t)$ のフーリエ係数 $A_{n-m+1, k}, B_{n-m+1, k}$ に関する条件付確率密度関数を求め、これより $U_{n-m+1}(t)$ の実現値 $u_{n-m+1}(t)$ を求める。次に $u_{n-m+1}(t)$ も条件に加えて $u_i(t); i=1, \dots, n-m+1$ を条件とする $U_{n-m+2}(t)$ のフーリエ係数 $A_{n-m+2, k}, B_{n-m+2, k}$ に関する条件付確率密度関数を求める。このようにして漸次的に互いに相関を持つ全ての確率波のフーリエ係数に関する条件付確率密度関数が得られる。このとき、 A_{jk} と $B_{jk} (\forall j, k)$ は互いに独立な正規変量となる。

これに基づいて 2 地点で確定波が与えられた場合の平均と条件付確率場のシミュレーション例をそれぞれ図 1, 2 に示す。図中で T は時間を、 x_0 は距離を表している。図 1 より条件付の確率波はもはや平均値 0 ではなく時間に依存する平均を持つことがわかる。ただし、確定波からの距離が大きくなるにつれて平均値は条件がない場合である 0 に近づいている。また図 2 では確定波からの距離が大きくなるにつれて次第に波形が変形していく様子がみられる。

3. 初通過問題

条件付の確率波 $U_n(t)$ がいき値 z を上向きに通過するという事象は、 $\mu U_n(t) = E[U_n(t)]$ とすると、平均値 0 の定常正規過程 $U_n(t) - \mu U_n(t)$ が、時間に依存するいき値 $z - \mu U_n(t)$ を上向きに通過するという事象と同値である。従っていづれの考え方に従っても同一の結果を得ることができるが、後者の時間に依存するいき値通過の問題については既に解析的にいき値通過の発生率が求められている [5]。この結果を利用して、いき値通過が独立に発生するものと仮定し、継続時間をパラメータとする最大値の確率分布を求めた。

図 3 にその確率分布、図 4 に平均と標準偏差を図 1, 2 と同じ条件のもとで計算した例を示す。図中で、 τ は継続時間を、 σ_0 は条件がない場合の標準偏差、 z_i は与えられた確定波の時間 $0 \sim \tau$ における最大値

を表す。なお、点は同じ条件下での1000回のシミュレーションの結果を示している。図3より、確定波のあるところではその最大値を与えるところで階段関数となるが、確定波からの距離が大きくなるほど確率分布は横に寝てくると共に条件のない場合の確率分布へと近づいていくことがわかる。このことは図4でもみられ、 x_0 が大きくなると水平線で表した条件のない場合へ近づいている。またシミュレーションと解析的な結果とは比較的良好な一致を示している。

特に図4(b)は1.で述べた問題において設置すべきセンサーの数や間隔を決定するための定量的な資料となるものと期待される。

4. おわりに

本研究では条件付確率場を解析的に記述し、その結果から初通過問題への応用を示した。今後は最初から与えられていると仮定しているスペクトルに波動の物理的性質を導入し、実際の波動場の問題に発展させていく予定である。

参考文献

1. Kameda, H., "Upgrading urban seismic safety and reliability —Proposal of regional seismic monitoring systems—," *U.S./Korea/Japan Trilateral Seminar on Frontier R & D for Constructed Facilities*, Honolulu, Hawaii, 1991.
2. 例えば, Vanmarcke, E. H. and Fenton, G. A., "Conditioned simulation of local fields of earthquake ground motion," *Structural Safety*, Vol.10, 1991, pp.247-264.
3. 盛川仁・亀田弘行: 既知波形を含む条件付確率場のシミュレーション理論, 都市耐震センター研究報告別冊第8号, 1991.4.
4. 盛川仁・亀田弘行: 既知波形を条件とする確率場のシミュレーション理論に関する基礎的研究, *JCOSSAR '91 論文集*, 1991.11, pp.137-144.
5. Shinozuka, M. and Yao, J. T. P., "On the two-sided time-dependent barrier problem," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.6, No.1, 1967, pp.98-104.

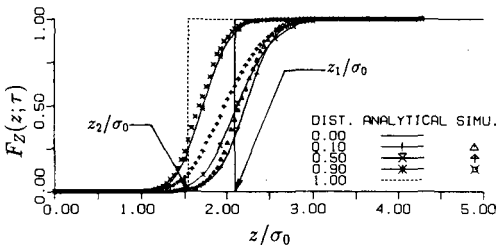
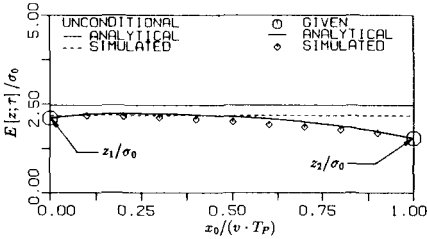
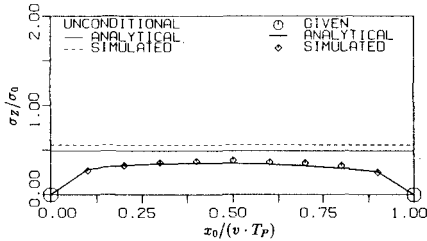


図3 time-maximum value の確率分布 ($\tau/T_P = 5.0$)



(a) 平均



(b) 標準偏差

図4 time-maximum value の平均と標準偏差 ($\tau/T_P = 5.0$)

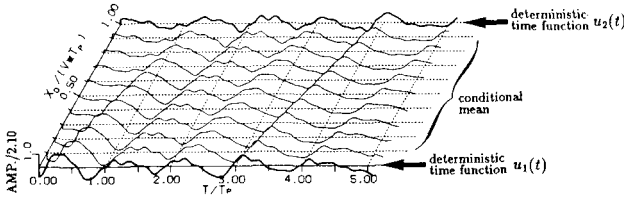


図1 2地点で確定波が与えられた場合の条件付確率場の平均

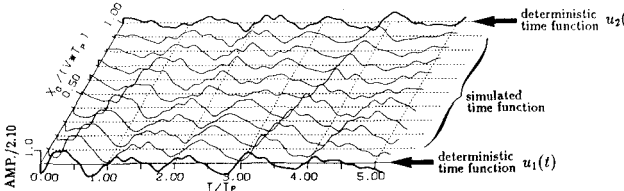


図2 2地点で確定波が与えられた場合の条件付確率場のシミュレーション例