# 海岸水理学における浅水長波近似方程式の数値計算法とその適用

京都大学大学院　学生員　○山中久生
京都大学防災研究所　正　員　山下隆男
京都大学防災研究所　正　員　土屋義人

**1. 緒　言**　本研究では，SOGREAH モデル[1]を参考にして，津波，高潮の tidal flat での伝播，陸上への遡上，海岸堤防破堤による氾濫をシミュレーションするための数値計算法の開発とその海岸水理学への適用を検討する．

本モデルは，水平２次元の長波近似方程式を有限差分陰解法で数値計算するもので，exchange depth の考え方を用いて移動境界条件を設定し，仮想固定壁により無反射開境界を設定した．さらに，基礎方程式を移流項，拡散項，伝播項の３つのパートに分割し，各々について離散化にともなう数値誤差を極力抑えるような差分スキームを用いた数値モデルとした．

**2. 数値計算法**　基礎方程式としては単位幅流量 $U,V$ および基準面から海面までの高さ $Z$ で表した水平２次元の長波近似方程式を用いた．また，水平拡散項とコリオリ力も考慮した．

この基礎方程式を移流項，拡散項，伝播項の３つのパートに分割する．つまり，移流項では移流に関する部分および局所的加速度項を，拡散項では水平方向への運動量拡散を表す部分，コリオリ力および局所的加速度項を，伝播項では運動方程式中の圧力勾配，大気圧勾配，海底面，自由水面上での摩擦力に関係する部分および連続方程式を，それぞれ考慮することとする．

(1) 移流項　移流項の計算では$\partial u/\partial t + u^n \partial u/\partial x = 0$ のような偏微分方程式を解く．この形をした方程式は，特性曲線法を用いて解くことができる．ここでは特性曲線法の一つである，Holly ら[2]の開発した Two-Point Fourth-Order Scheme を用いた．これは求めるべきタイムステップでの流速値を計算するために，１つ前のタイムステップの流速値と流速勾配を用いる方法である．

(2) 拡散項　拡散項の計算には Crank-Nicholson Scheme を用いた ADI 法によった．

(3) 伝播項　移流項，拡散項の計算は流速場に関係するものであるが，伝播項の計算には水位変動が連続式と連立して寄与する．SOGREAH モデルにならって，伝播計算には$\Delta Z = Z^{n+1} - Z^n$(水位の時間変化) に関する楕円型偏微分方程式に書き換えた基礎方程式を誘導した．さらに，これを空間スタッガード格子において，Iterative ADI 法（繰り返し交互陰解法）を用いて解いた．

すなわち，底面せん断応力$\vec{\tau}_b^{n+1}$は，未知数$\vec{U}^{n+1}$の積で表示されるため，これをテーラー展開し摩擦項を線形化したのち，連続式に代入し$\vec{U}^{n+1}$を消去，高次の微小量$\partial/\partial x(\Delta Z \partial \Delta Z/\partial x)$ を無視すると，次式のような楕円型の線形偏微分方程式を得る．

$$-\frac{\Delta Z}{g\Delta t^2} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^n}{\varepsilon}\frac{\partial \Delta Z}{\partial x} + \frac{\Delta Z}{\varepsilon}\frac{\partial Z^n}{\partial x} + \frac{\theta_x}{\varepsilon}\Delta Z\right) + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^n}{\varepsilon}\frac{\partial \Delta Z}{\partial y} + \frac{\Delta Z}{\varepsilon}\frac{\partial Z^n}{\partial y} + \frac{\theta_y}{\varepsilon}\Delta Z\right)$$

$$= f_1 + f_2 - \frac{\alpha}{g}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c_x}{\varepsilon}\right) - \frac{\alpha}{g}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c_y}{\varepsilon}\right) \qquad (1)$$

ここに，

$$\varepsilon = 1 + \alpha g \left(\frac{|\vec{U}|}{C^2 h^2}\right)^{n+\frac{2}{3}} \Delta t, \quad \theta_x = -2\left(\frac{|\vec{U}|}{C^2 h^2}\right)^{n+\frac{2}{3}} \frac{U^{n+\frac{2}{3}}}{h^n}, \quad \theta_y = -2\left(\frac{|\vec{U}|}{C^2 h^2}\right)^{n+\frac{2}{3}} \frac{V^{n+\frac{2}{3}}}{h^n}$$

Hisao YAMANAKA, Takao YAMASHITA, Yoshito TSUCHIYA

$$c_x = (1-\alpha) g \left( \frac{|\vec{U}|}{C^2 h^2} \right)^{n+\frac{2}{3}} U^{n+\frac{2}{3}} - \frac{\vec{\tau}_{sx}}{\rho}, \quad c_y = (1-\alpha) g \left( \frac{|\vec{U}|}{C^2 h^2} \right)^{n+\frac{2}{3}} V^{n+\frac{2}{3}} - \frac{\vec{\tau}_{sy}}{\rho} \tag{2}$$

これを，数値計算上，式(1) に方向性を仮定するすることによって生じる誤差$q$を受渡しの媒介として，ADI法を繰り返し実行する Iterative ADI 法により収束計算を行う．つまり，式(1) を２方向に分割することにより，スカラー量$\Delta Z$が，$x, y$方向掃過によってそれぞれ得られる$\Delta Z_1$，$\Delta Z_2$の２種類存在することとなる．求めるべき解は，$\Delta Z_1 = \Delta Z_2$となるはずであるから，$|\Delta Z_1 - \Delta Z_2| < \varepsilon$ となるまで繰り返し計算を行う．

以上のように，運動方程式と連続式を式(1) のような$\Delta Z$に関する楕円型偏微分方程式に書き換え，これを Iterative ADI 法を用いて解く点が本モデルの特色である．

**3. 移動境界，無反射開境界**　さらに本モデルには移動境界，および無反射開境界を組み込んだ．

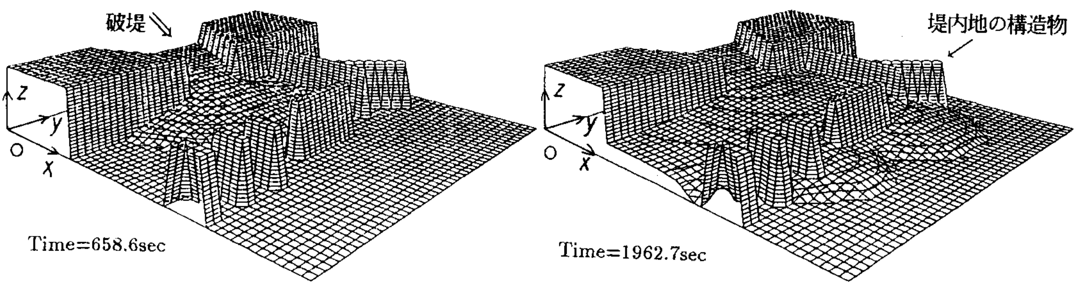
無反射開境界は仮想固定境界[3]の考え方を用いた．すなわち仮想的な固定境界で生じる完全重複波の波高の 1/2 を開境界から出ていく波高とした．これにより，任意の端部でほぼ無反射の開境界を設定できた．

さらに，移動境界は氾濫計算や tidal flat 上での長波の伝播計算を行うために exchange depth の概念を用いた．すなわち，流れの力学的機構にしたがって重み $\gamma$ を決定することにより，移動境界を考慮する．$\gamma$ は式(1) の２階の微係数を差分近似するために生じ，次式で表される．

$$h_{i+\frac{1}{2}} = \gamma_{i+\frac{1}{2}} h_{i+1} + (1 - \gamma_{i+\frac{1}{2}}) h_i \tag{3}$$

具体的には底面抵抗と動水勾配がつりあうという仮定 $gh\partial Z/\partial x + \tau_{bx}/\rho = 0$ を，フロント部での条件 $\partial Q_x/\partial Z_{dw} < 0$ ($Q$ は $U$を伝播項計算に使いやすいように変換したもの) にあてはめ，重み $\gamma$ を決定する．この取り扱いにより，流れの特性によって上，下流の伝播への寄与率を決定する exchange depth の概念を移動境界に導入することができる．

**4. 計算結果**　上述の数値計算法により，津波の伝播，越流，遡上計算を想定したテスト計算を行った．得られた計算結果の一例を以下に示す．




防波堤の破堤による氾濫計算（水位変動）

**5. 結　語**　以上のように，水平２次元長波近似方程式の数値計算法として，基礎方程式を３つのパートに分割し，各々を最も適した方法で計算する方法が有効であるということ，および伝播計算では，$\Delta Z$ を未知数とした楕円型偏微分方程式を基礎式として，それを Iterative ADI 法を用いて計算する方法が効果的であることを示した．

参考文献 1)Benqué, J. P. et al.: New Method for Tidal Current Computation, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 108, No. WW3, Aug., 1982, pp. 396-417. 2) Holly, F. M., and Preissmann, A.: Accurate Calculation of Transport in Two Dimensions, Journal of the hydraurics Division, ASCE, Vol. 103, No. HY11, Nov., 1977, pp. 1259-1277. 3) 日野幹雄・仲座栄三: 数値波動解析における新しい無反射境界スキームの平面二次元問題への適用，第 35 回海岸工学講演会論文集，pp. 262-266, 1988.