

衝撃荷重を受ける矩形厚板の応答解析

大阪市立大学工学部 正 員 小林 治俊

大阪市立大学工学部 正 員 園田恵一郎

大阪市立大学大学院 学生員 ○中岡 健一

1. まえがき

先に筆者らは、衝撃荷重を受ける平面梁、厚円盤を動弾性論に基づく固有関数展開法（モード法）により解析し、その応力波伝播特性を明らかにした[1, 2]。いっぽう、Lee-Reismann は矩形厚板の長期応答を Mindlin 平板解と比較しているが[3]、矩形板の動特性を把握するためには、過渡状態での応力波伝播特性を含むデータが必要であろう。本研究は Lee-Reismann 同様に矩形厚板の衝撃応答を取扱ったものである。ただし、衝撃荷重を正弦波形に限定し、基礎的なデータを得ることとした。

2. 解析方法

取扱う矩形板の座標系を図1に示している。等方性弾性体の運動方程式は次式で与えられる。

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}) = \rho (\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2) \quad \dots (1)$$

ここに、 $\mathbf{u}=(u, v, w)$ は変位ベクトル、 μ, λ はラメの定数、 ρ は密度、 t は時間、 ∇^2 はラプラシアンである。

矩形板上面に衝撃荷重 $f(t)q(x, y)$ が作用するものとすれば、本問題の単純支持条件および上面・下面の境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} 1. \sigma_x = v = w = 0 \quad (x=0, a) \\ 2. \sigma_y = u = w = 0 \quad (y=0, b) \\ 3. \sigma_z = -f(t)q(x, y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (z=h/2) \\ 4. \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (z=-h/2) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

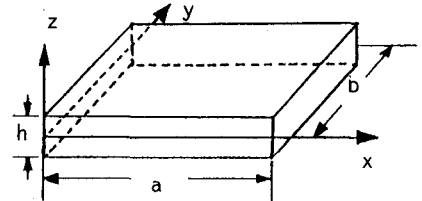


図1 矩形板の座標系

式(1)の解は、慣性項を無視した静的問題の解 $\mathbf{u}^s=(u^s, v^s, w^s)$ と、それを考慮した擾乱解 $\mathbf{u}^d=(u^d, v^d, w^d)$ の和として次のように与える。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = f(t)\mathbf{u}^s(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^d(\mathbf{x}, t) \quad \dots (3)$$

$$\mathbf{u}^d(\mathbf{x}, t) = \sum_m \sum_n \sum_l Q_{mnl}(t) \mathbf{U}_{mnl}(\mathbf{x}) \quad \dots (4)$$

ここに、 $\mathbf{x}=(x, y, z)$ 、 $Q_{mnl}(t)$ は未定の時間関数、 $\mathbf{U}_{mnl}(\mathbf{x})$ は境界条件を満足する固有関数である。

式(3)、(4)を式(1)に代入し、固有関数の直交性を利用すると $Q_{mnl}(t)$ に関する微分方程式(5)を得る。

$$(\partial^2 Q_{mnl} / \partial t^2) + p_{mnl}^2 Q_{mnl} = -Z_{mnl} (\partial^2 f / \partial t^2) \quad \dots (5)$$

ただし、 p_{mnl} は固有円振動数、係数 Z_{mnl} は次式で与えられる。

$$Z_{mnl} = \int_V \mathbf{u}^s \mathbf{U}_{mnl} dV / \int_V \mathbf{U}_{mnl}^2 dV \quad \dots (6)$$

式(5)の解はデュハメル積分で与えられ、初期条件を与えることにより解が確定する。本解析では衝撃を受ける前には矩形板は静止しているものとした。

3. 数値計算結果

正方形板 ($a=b$) を取扱い、作用荷重は衝撃を受ける矩形板内の応力変動に対する基礎的なデータを得るために、正弦波 $\sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ 荷重とした。また断わらない限り板厚比は $h/a=0.1$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ で、荷重の時間関数はステップ関数、 $f(t)=H(t)$ 、である。なお、級数の項数は $l=1000$ ($m=n=1$) とした。

図2は、中央断面 ($x=a/2, y=b/2$) 上の3点、 $z/h=0.3, 0.0, -0.3$ での σ_z の初期応答曲線である。横軸は無次元

元時間 $\tau (=c_1 t/h, c_1$ は縦波の速度) を表している。図において応力が不連続的に変動している箇所は、応力波の波面が到達したことを示している。板上面全体に作用する正弦波荷重であるため、応答はほぼ一軸棒の縦衝撃の場合と酷似しているが、時間が経つに従い境界からの反射波の影響により、応答に乱れが生じて来る。

図3, 4は下面中央 ($x=a/2, y=a/2, z=h/2$) での σ_x , 点 ($x=a/100, y=a/2, z=0$) での τ_{xz} の長期応答曲線である。板厚比が大きくなれば応答周期が短くなり、その最大応答値は減少する。最後に図5に、荷重の時間関数がステップ関数と台形波形である場合の応答の比較例として、下面中央の σ_x の応答曲線を示した。当然のことではあるが作用時間が短い程最大応答値は小さくなっている。

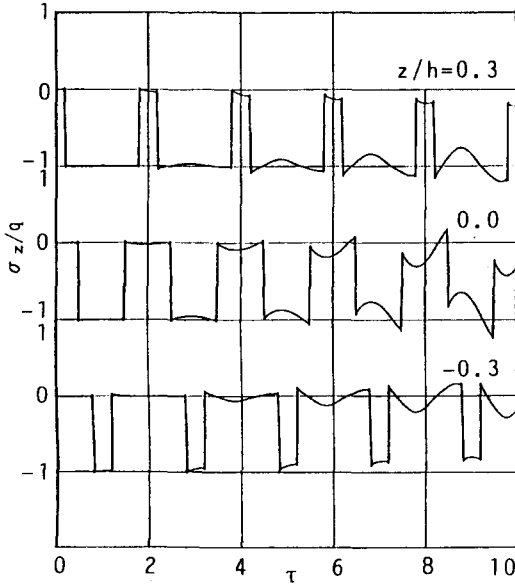


図2 中央断面での σ_x の初期応答曲線

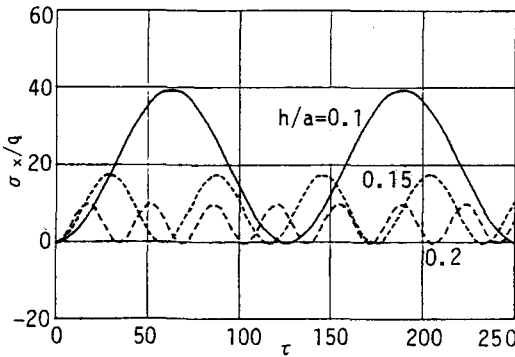


図3 下面中央での σ_x の長期応答曲線

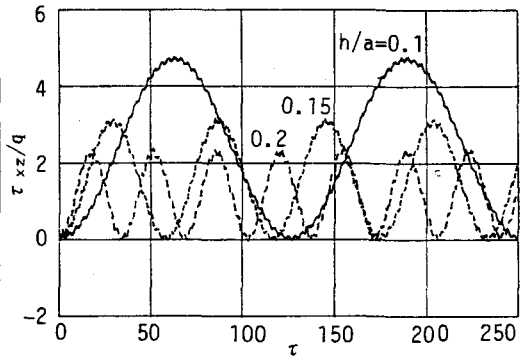


図4 着目点 ($x=a/100, y=a/2, z=0$) での τ_{xz} の長期応答曲線

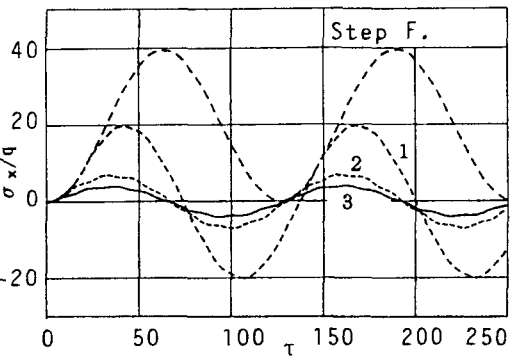
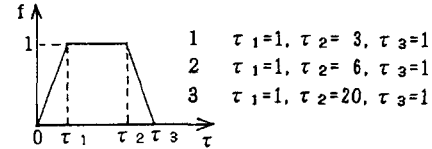


図5 台形波入力時の下面中央での σ_x の応答曲線

4. 参考文献

- 1) 奥田, 小林, 園田: 衝撃荷重を受ける平面梁内の応力波伝播について, 昭和63年度土木学会関西支部年次学術講演会, 1-4, 1989.
- 2) 小林, 園田, 山本, 中岡: 衝撃荷重を受ける厚円盤の応力波伝播解析, 第14回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, pp. 275-280, 1990.
- 3) Lee, Y. C. and Reismann, H.: Dynamics of Rectangular Plates, Int. J. Engng. Sci., Vol. 7, pp. 93-113, 1969.