不等間隔差分による構造解析

関西大学工学部　正会員　米澤　博　　関西大学工学部　正会員　堂垣正博
㈱　栗本鐵工所　正会員○吉峰智徳　　㈱　きんでん　正会員　甲藤聖二

1．まえがき　境界値問題や初期値問題などを解析する場合，その基礎微分方程式を近似的に解く方法に差分法がある．通常用いられる差分法は解析対象領域を等間隔に分割し，等間隔な分点で基礎方程式を差分表示する方法である．しかし，局所的な荷重が作用する場合や複雑な形状の境界を考える場合など，この方法では少ない分点でよい精度の解を得ることが難しい．精度のよい解を得ようと思えば，不必要な領域まで細かく分割して解析する必要がある．そこでここでは，局所的な荷重が作用する近傍のみを細かく分割し，その他の領域は粗な分割で解析することによって精度のよい解を得るための簡易で効率的な差分法を考える．すなわち，解析対象の全領域を等間隔に分割するかわりに不等間隔に分割し，ランダムな分点で微分係数を差分表示する．この方法を集中荷重や部分分布荷重を受けるはりや平板の曲げ問題に適用し，本手法の有効性と解の精度を検討する．

2．不等間隔差分法　図-1に示す関数f(x)の微分係数を離散的な関数値で表すことを考える．たとえば，2階と4階の微分係数を図-1(a) のような等間隔に設けられた離散点（分点間の距離λ）での関数値を用いて差分表示すれば，よく知られた次式を得る．

$$(d^2f/dx^2)_i=(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})/\lambda^2\ ,$$
$$(d^4f/dx^4)_i=(f_{i+2}-4f_{i+1}+6f_i-4f_{i-1}+f_{i-2})/\lambda^4 \qquad (1)$$

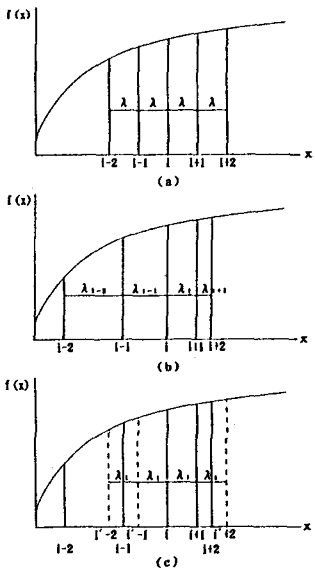


図-1

次に，図-1(b) に示す不等間隔に設けられた分点i-2, i-1, i, i+1, i+2 での関数値を用いて2階と4階の微分係数を差分表示する．不等間隔の分点を用いるため，ただちに式(1) のような差分式を得ることはできない．そこで，微分係数を差分表示しようとする分点 i と分点i-1 との間隔λ_{i-1} あるいは分点 i と分点i+1 との間隔λ_i のうち，小さい方の間隔で等間隔に設けられた仮想の分点群を考える（図-1(c)）．仮に，$\lambda_i<\lambda_{i-1}$ とすれば，仮想分点i'-2, i'-1, 分点i, 分点i+1, 仮想分点i'+2のうち，分点 i を中心とする3分点あるいは5分点を用いて2階と4階の微分係数が差分表示できる．この場合，すべての分点間隔がλ_i であり，式(1) と同一の差分係数からなる次式を得る．

$$(d^2f/dx^2)_i=(f_{i+1}-2f_i+\underline{f_{i'-1}})/\lambda_i^2,$$
$$(d^4f/dx^4)_i=(\underline{f_{i'+2}}-4f_{i+1}+6f_i-\underline{4f_{i'-1}}+\underline{f_{i'-2}})/\lambda_i^4 \qquad (2)$$

しかし，下線部の関数値$f_{i'-2}$, $f_{i'-1}$, $f_{i'+2}$ は仮想点での値であり，解析時に用いることのできない未知数である．したがってここでは，これらの関数値$f_{i'-2}$, $f_{i'-1}$, $f_{i'+2}$ を不等間隔に設けられた分点における関数値f_{i-2}, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}を用いてLagrange補間し差分表示すれば，次式を得る．

$$(d^2f/dx^2)_i=(a_1f_{i+1}+a_2f_i+a_3f_{i-1})/\lambda_i^2,$$
$$(d^4f/dx^4)_i=(b_1f_{i+2}+b_2f_{i+1}+b_3f_i+b_4f_{i-1}+b_5f_{i-2})/\lambda_i^4 \qquad (3)$$

たとえば，係数a_1～a_3 は

$$a_1=\frac{(x_{i'-1}-x_{i-1})(x_{i'-1}-x_i)-2(x_{i'}-x_{i-1})(x_{i'}-x_i)+(x_{i'+1}-x_{i-1})(x_{i'+1}-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)},$$

$$a_2=\frac{(x_{i'-1}-x_{i-1})(x_{i'-1}-x_{i+1})-2(x_{i'}-x_{i-1})(x_{i'}-x_{i+1})+(x_{i'+1}-x_{i-1})(x_{i'+1}-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})},$$

Hiroshi YONEZAWA, Masahiro DOGAKI, Tomonori YOSHIMINE and Seiji KATTO

$$a_3 = \frac{(x_{i'-1}-x_i)(x_{i'-1}-x_{i+1}) - 2(x_{i'}-x_i)(x_{i'}-x_{i+1}) + (x_{i'+1}-x_i)(x_{i'+1}-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} \tag{4}$$

である．なお，係数b_1～b_5は紙面の都合上，割愛した．

したがって，解析に必要な微分係数を任意の分点で不等間隔差分表示すれば，多元連立一次方程式が得られ，これを解けば未知量fを決定することができる．

3．不等間隔差分法の構造解析への適用　まず初めに，スパン中央に集中荷重が作用する単純ばりの曲げ解析に不等間隔差分を適用し，その有効性を検討する．

曲げ剛さEI，スパン長ℓで，スパン中央に集中荷重Pを受ける単純ばりのたわみwは

$$d^4w/dx^4 = P/EI$$

をx=0およびℓでの境界条件$w=d^2w/dx^2=0$のもとに解けば求められる．

2.で誘導した不等間隔差分法を用いると，分点間の間隔がすべて異なる場合が解析できるが，ここでは解析対象の領域全体をあらかじめ粗な間隔で等分し，さらに細分割の必要な領域のみを等間隔に細分割して解析する方法を用いた数値解析結果について検討する．

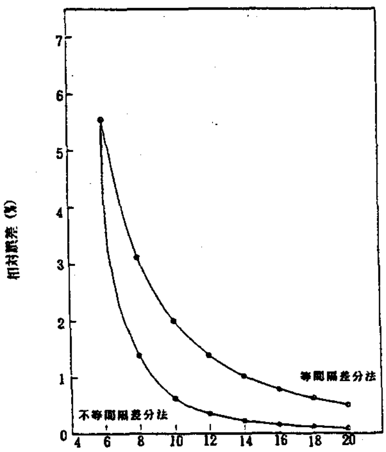
まず，全スパンを粗な間隔で6等分し，さらに荷重作用点のスパン中央の3分点の領域を等間隔に4から16までの分割数を用いて細分割する．この場合，スパン中央のたわみと総分割数との関係は図-2と表-1のようになる．ただし，参考までに全スパンを等間隔に8～20分割した場合の結果も示した．

これらの図表から明らかなように，不等間隔差分法を用いれば，等間隔差分法よりも少ない分割数で精度のよい解を得ることができる．

第2の適用例として，載荷幅が$c=0.1\ell$で，スパン中央に等分布の部分荷重qを受ける単純ばりを考える．スパン全体の分割数を$n_x = 2n_{x1}+n_{x2}=20$に固定し，荷重が作用しない領域の分割数$2n_{x1}$と作用する領域の分割数n_{x2}を種々組み合わせて差分解の精度を検討する．なお，部分荷重の両端が分点間の中央になるように分割しなければならないので，細分割する区間の長さは$\ell_x = c \times n_{x2}/(n_{x2}-3)$となる．

部分分布荷重が作用する領域をn_{x2}=8, 10, 12, 14に等分割し差分解の精度を調べると，表-2の結果を得る．同表から明らかなように，不等間隔差分法で解析すれば，いずれのn_{x2}を用いた場合でも厳密解に極めて近い結果を得る．また，分布荷重の作用する領域の分割数n_{x2}を増やし細分割すればするほど解の精度がよくなることもわかる．

なお，その他の適用については講演会当日述べる．



図－2

表－1　不等間隔差分と等間隔差分による解の比較

(a) 不等間隔差分による解

分割数			スパン中央のたわみ	相対誤差
n_x	n_{x1}	n_{x2}	$(\times P\ell^3/EI)$	(%)
6	2	2	0.021991	5.558
8	2	4	0.021123	1.392
10	2	6	0.020962	0.619
12	2	8	0.020906	0.350
14	2	10	0.020880	0.226
16	2	12	0.020865	0.154
18	2	14	0.020857	0.115
20	2	16	0.020851	0.086
厳密解			0.020833	

(b) 等間隔差分による解

分割数	スパン中央のたわみ	相対誤差
n_x	$(\times P\ell^3/EI)$	(%)
6	0.021991	5.558
8	0.021484	3.124
10	0.021250	2.002
12	0.021123	1.392
14	0.021046	1.022
16	0.020996	0.782
18	0.020962	0.619
20	0.020937	0.499
厳密解	0.020833	

表－2　部分荷重を受ける単純ばりの不等間隔差分による解の精度

分割数			スパン中央のたわみ	相対誤差
n_x	n_{x1}	n_{x2}	$(\times q\ell^4/EI)$	(%)
20	6	8	0.0020762	0.0965
20	5	10	0.0020742	0.0482
20	4	12	0.0020738	0.0289
20	3	14	0.0020736	0.0193
厳密解			0.0020732	