ＯＤ分布交通量の予測誤差に関する一考察

京都大学大学院 ○学生員 楊 海
京都大学工学部 正 員 秋山孝正
京都大学工学部 正 員 佐佐木綱

１．はじめに

従来数多くの分布交通量推計モデルが提案されている。これらのモデルはゾーン間交通量の分布パターンを特定化する、あるいは既存ODパターンに基づいて所与周辺分布を満たすように分布交通量を修正するものである。その中でも特にフレーター法、重力モデル法、エントロピー法等が広く用いられている。OD分布交通量は、交通システム計画と管理のための基本的情報として用いられており、信頼性の高い情報を提供できるためには、モデルの性能としてのOD分布交通量の予測精度が重要な課題となる。

本研究では、分布交通量予測において、所与の周辺分布を満たす無数のODパターンから予測結果としてのODパターンを特定化する際、起こりうる最大可能相対誤差及びその定式化を提案する。

２．モデルの概要

与えられたゾーンiの発生交通量O_i($i=1,2,\cdots,I$)、ゾーンjの集中交通量D_j($j=1,2,\cdots,J$)に対して、分布交通量T_{ij}を推定するモデルは、周知のように次のように表すことができる。

$$T_{ij}=F(O_i,D_j,t_{ij},d_{ij}) \qquad (1)$$

$$\textstyle\sum_j T_{ij}=O_i;\quad (i=1,2,\cdots,I) \qquad (2)$$

$$\textstyle\sum_i T_{ij}=D_j;\quad (j=1,2,\cdots,J) \qquad (3)$$

ここに、t_{ij}は現在のOD交通量であり、d_{ij}はパラメータである。

ここでは、簡単のために、行列表現を用いることにする。

$$\mathbf{u}=[u_1,u_2,\cdots,u_n]^T=[T_{11},T_{12},\cdots,T_{IJ-1},T_{IJ}]^T$$

（uはベクトルとして表した将来OD分布表）

$$\mathbf{v}=[v_1,v_2,\cdots,v_m]^T=[O_1,O_2,\cdots,O_I,D_1,D_2,\cdots,D_J]^T$$

（vは将来の発生・集中交通量の周辺分布）

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} 1,1,\cdots,1 & & & \\ & 1,1,\cdots,1 & & \\ & & \cdots & \\ & & & 1,1,\cdots,1 \\ 1, & 1, & 1, & \\ \;1, & \;1, & \;1, & \\ \;\;\cdots & \;\;\cdots & \;\;\cdots & \\ \;\;\;1, & 1 & 1 & \end{bmatrix}=[w_{ij}]$$

Hai YANG, Takamasa AKIYAMA and Tsuna SASAKI

よって、制約条件(2),(3)を合わせて次の様に表すことができる。

$$\mathbf{v}=\mathbf{W}\mathbf{u} \qquad (4)$$

トリップエンド条件(4)（周辺分布）を満たすOD分布交通量の制約集合をＳとする、

$$S=\{\mathbf{u}\geq 0 \mid \mathbf{v}=\mathbf{W}\mathbf{u}\} \qquad (5)$$

Ｓ内の任意２点 $\mathbf{u}^1,\mathbf{u}^2$ とし、２点 $\mathbf{u}^1,\mathbf{u}^2$ を結ぶ線分$(1-\alpha)\mathbf{u}^1+\alpha\mathbf{u}^2,\ \alpha\in[0,\ 1]$ を考えると、

$$\mathbf{W}[(1-\alpha)\mathbf{u}^1+\alpha\mathbf{u}^2]=\mathbf{v} \qquad (6)$$

$$(1-\alpha)\mathbf{u}^1+\alpha\mathbf{u}^2\geq 0 \qquad (7)$$

より、この線分はＳ内にある。

さらに行列Ｗの性質より、uの各要素が上に有界であることは簡単に証明できる。ゆえに集合Ｓは閉凸多面体であることがわかる。

数学的モデルによる分布交通量予測は与えられた発生・集中交通量を満足する無数のODパターンからある一つのODパターンを求めようとする、つまり閉凸多面体Ｓにおける特定の一点を選ぶわけである。

実際の予測においては、将来の発生・集中交通量が正確に推定されても、モデルの不一致性、ODパターンの変化などにより、必ずしも集合Ｓにおける真実OD交通量に対応する点を正確に決定できるとは限らない。しかし現実の予測は予測時点の真実値が未知であるため、予測誤差は実際に知り得ない。ここでは真実誤差を計算する代わりに、推計結果の最大可能相対誤差を求めることにする。

いまモデルによって推定されるODパターンが閉凸多面体Ｓにおける点 0に対応しているとしよう。発生集中交通量の予測値に誤差がない場合、真実OD交通量も制約領域Ｓ内のいずれかの点に対応してはいるが、どの点に対応しているかはわからない。まず点0から最も離れた領域Ｓの境界点Aとしよう。0A間の相対距離は、モデル予測におけるODパターンの特定化の不一致性による最大可能相対誤差を表している。明らかに最大可能相対誤差は、分布交通量の推定結果とともに、具体的に求めることができる。

3．最大可能相対誤差の定式化

いま真実 OD交通量u^*_iと推計OD交通量u_iとし、両者の比率をr_iとする。

$$r_i = \frac{u^*_i}{u_i} \quad (u_i > 0,\ r_i \geq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (8)$$

ただし、真実OD交通量u^*_iは未知である、またすべての推計OD交通量について$u_i > 0$ とする。

式(8)より

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} r_1 & & & 0 \\ & r_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_n \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$= \mathbf{R}\mathbf{u} \qquad (9)$$

が得られる。ここに $\mathbf{R}$ は、r_iを要素とする対角マトリックスである。

ベクトル$\mathbf{u}^*$と$\mathbf{u}$のいずれも制約条件(4)を満足しなければならないから、

$$\mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{u} \qquad (10)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{W}\mathbf{u}^* \qquad (11)$$

式(10)と式(11)より、

$$\mathbf{W}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) = \mathbf{0} \qquad (12)$$

がわかる。また式(9)より、

$$\mathbf{W}(\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad (13)$$

あるいは

$$\mathbf{W}\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad (14)$$

が得られる。ここに、$\mathbf{I}$は単位マトリックスである。

また

$$\mathbf{G} = \mathbf{R} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} r_1-1 & & & 0 \\ & r_2-1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & r_n-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z_1 & & & 0 \\ & z_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z_n \end{bmatrix}$$

$$z_i = r_i - 1 = \frac{u^*_i - u_i}{u_i} \geq -1 \ (r_i \geq 0 \text{より}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (15)$$

z_iはODペアiの推計交通量の相対誤差を表している。

したがって、全ODペアの推計交通量の平均相対誤差 $Er(\mathbf{z})$は、次のようになる。

$$Er(\mathbf{z}) = \sqrt{S(\mathbf{z})/n} \qquad (16)$$

ここに、

$$S(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}^T; \quad \mathbf{z} = [z_1, z_2, \cdots, z_n] \qquad (17)$$

さらに式(14)の左辺の内$\mathbf{Gu}$は次のように変換できる。

$$\mathbf{G}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} z_1 & & & 0 \\ & z_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & & & 0 \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{U}^d \mathbf{z}^T$$

ここに、$\mathbf{U}^d$は推計OD交通量ベクトル$\mathbf{u}$を対角線要素として他の要素をすべて0とするマトリックスである。

よって、式(14)は

$$\mathbf{W}\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{W}\mathbf{U}^d\mathbf{z}^T = \mathbf{0} \qquad (18)$$

となる。

いまモデルによって、OD交通量 $u_i (i = 1, 2, \cdots, n)$が推計されたとき、最大可能平均相対誤差を$z_i \geq -1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ および式(18)の制約条件のもとで、式(17)の $S(\mathbf{z})$を最大にするようなベクトル $\mathbf{z}$ からなる$Er(\mathbf{z})$として定義すると、推計 OD交通量の最大可能平均相対誤差を求めることは、以下のような二次計画問題に帰着させることができる。

$$\text{Maximize} \quad S(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}^T \qquad (19)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{W}\mathbf{U}^d\mathbf{z}^T = \mathbf{0} \qquad (20)$$

$$z_i \geq -1 \ (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (21)$$

4．まとめ

以上で分布交通量予測における最大可能相対誤差という概念を提案し、その定式化を示した。この最大可能相対誤差は推計結果の真実誤差の上限を表しており、実際にも計算できるため、推定結果の確信度を評価する場合に極めて有用な情報を提供できると考えられる。今後は発生集中交通量の予測誤差をも含めて分布交通量の予測誤差を検討して行きたい。

[参考文献] 楊、飯田、佐佐木：観測リンク交通量に基づくOD交通量推計の信頼度評価法、土木学会論文集（投稿中）。