

最適制御モデルによるイベント事業の投資効果分析

京都大学工学部 正 員 吉川和広 京都大学工学部 正 員 奥村 誠
京都大学工学部 学生員○秀島栄三

1. はじめに

リゾート開発などの地域整備において、長期的な施設整備事業に、博覧会、祭りなどのイベントを組み合わせていくことが効果的であると認識されてきた。

イベントの成否はその企画内容によって大きく左右されるが、その前提となる施設の整備状況によっても異なってくる。そのため、イベントを単独にとり出して質的側面から議論するばかりでなく、地域整備のなかで施設整備事業とどのように組み合わせしていくかを量的側面から議論する必要がある。

そこで地域整備における投資とその効果の時間的変動を数式化したモデルを作成し、整備目的を効率的に達成するための事業投資案を求める。すなわち、整備期間中の各時点における両事業への投資額を操作変数とし、この操作変数とその他の外生変数の汎関数(時間積分)を目的関数として定式化すれば最適化問題が得られる。

ここでは、地域の評判向上を期間中の総来客数で表わし、その最大化問題として捉える。

2. 地域整備事業とその投資効果

地域整備を構成する各種の事業を、施設整備事業とイベント事業の2種類に分ける。

イベント事業は短期的で、また、投資効果が即時的に大きく現われる事業と定義する。イベント事業によって一人の標準的な利用者が得る効用 $V(t)$ はイベント投資額 $E(t)$ とアイデアやイベントを打つ時の状況による効用値の違いを示すパラメータ α を用いて次式のように表わす。

$$V(t) = \alpha E(t) \quad (1)$$

一方、施設整備事業は長期にわたり、その効果が時間的に継続するような事業である。それだけではさほどの集客力を有しないが地域の魅力の基盤となる事業である。施設整備事業による効用 $W(t)$ については、実際に訪れてみなければ施設の状況はわからないので、評判によって判断されると仮定する。

この評判は既にその地域に訪れた客の施設に対する評価 $R(t)$ が蓄積されたものであると考えた。

$$W(t) = \int_0^t R(S) dS \quad (2)$$

$R(t)$ は、施設整備量 $S(t)$ (施設整備投資額 $F(t)$ の累積) によって高まる。また来客数が施設の収容力を越えると負の効果が現われるものとして、これを来客数 $P(t)$ で表わされる項として与える。ただし、 β 、 γ はパラメータである。

$$R(t) = \beta S(t) - \gamma P(t) \quad (3)$$

$$S(t) = \int_0^t F(S) dS \quad (4)$$

ある開発地が一人の利用者に与える効用 U は、 V 、 W という確定的な項(この総和を $\square$ とする)と嗜好の違いなどによる不確定な項 ϵ との和である。

$$U = V + W + \epsilon = \square + \epsilon \quad (5)$$

ϵ がガンベル分布をとるとしたときに、ある開発地 i への来客数 $P(t)$ は、競合する各開発地 ($j=1, 2, \dots, i, \dots, N$) が与える確定効用によって、ロジットモデルで表わされる。さらに開発地 i 以外の確定効用のログサム変数を L としてまとめれば $P(t)$ は、

$$P(t) = P \frac{\exp \square(t)}{\exp \square(t) + \exp L} \quad (6)$$

と表わされる。(定数 P は影響圏の利用者人口)

地域整備のために同時に使用可能な資金は限られることから、イベント投資額と施設整備投資額の総和を常時一定とする。したがって次式が成立する。

$$E(t) + F(t) = C \text{ (const)} \quad (7)$$

イベントへの投資配分比を $u(t)$ ($0 \leq u(t) \leq 1$) とすれば、 $E(t)$ と $F(t)$ は次のように表わされる。

$$E(t) = C u(t) \quad (8)$$

$$F(t) = C (1 - u(t)) \quad (9)$$

3. 総来客数を最大化する事業投資案の導出

以上の仮定のもとで、期間中の総来客数を最大にする最適投資案 $u^*(t)$ を求めたい。

最大原理を適用するために、式を整理すれば、

$$J = \int_0^T P(t) dt \rightarrow \max \quad (10)$$

$$X_0 = J(t), \quad \frac{dX_0}{dt} = P(t) \quad (11)$$

$$= \frac{P \exp W(t) \exp V(t)}{\exp W(t) \exp V(t) + \exp L}$$

$$X_1 = W(t), \quad \frac{dX_1}{dt} = \beta S(t) - \gamma P(t) \quad (12)$$

$$X_2 = S(t), \quad \frac{dX_2}{dt} = C(1 - u(t)) \quad (13)$$

$$X_3 = t, \quad \frac{dX_3}{dt} = 1 \quad (14)$$

J を最大化することは、次に示すハミルトニアン(以後 H^* と表わす)を最大化することと同義である。 $H^* = -\psi_0(t)P(t) + \psi_1(t)(\beta S(t) - \gamma P(t)) + \psi_2(t)F(t) + \psi_3(t) \rightarrow \max (\leq 0)$ (15)

$$\text{ここで } \psi_k(t) (k=0, 1, 2, 3) \text{ は, } \frac{d\psi_k}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial X_k}$$

なる微分方程式を解くことにより求められる。目的関数に対応する $\psi_0(t)$ の初期値は任意の負数、その他の $\psi_k(t)$ の初期値は任意に与えてよい。

最適解 u^* は H^* を最大にする u である。もし、

$$\frac{dH^*}{du} = \frac{(1 - \gamma \psi_1(t)) \alpha C \exp(W+V) (\exp(W+V) + \exp L - \exp V)}{(\exp W \exp V + \exp L)^2 - C \psi_2(t)} \quad (16)$$

を満たす u が内点($0 \leq u \leq 1$)であれば、これが最適解であるが、式(16)の分子は常に正で、分母の符号の変化が内点で起こるケースは極めて少ない。多くの場合、領域の両端、すなわち $u=1$ と $u=0$ とで H^* の値が大きい方が最適解 u^* として選ばれる。

$H^*(u=1) - H^*(u=0)$ について、 W に依存する項を左辺に、依存しない項を右辺にまとめると、

$$\frac{\exp W \exp V}{\exp W \exp V + \exp L} - \frac{\exp W}{\exp W + \exp L} > \frac{C \psi_2(t)}{P(1 - \gamma \psi_1(t))} \equiv K(t) \quad (17)$$

この右辺はパラメータによって決まるもので、 $W(t)$ によって左辺と $K(t)$ の大小関係が変化するとともに最適解が切り替わる。

$$\text{この左辺をさらに } \frac{\exp L}{\exp W} = w^* \text{ の関数 } f(w^*)$$

と見なす。 $f(w^*)$ と、その w^* に対する偏微分は、

$$f(w^*) = \frac{\exp V}{\exp V + w^*} - \frac{1}{1 + w^*} \quad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial w^*} = \frac{(1 - \exp V)(w^{*2} - \exp V)}{(\exp V + w^*)^2 (1 + w^*)^2} \quad (19)$$

式(19)の分母は正、 $(1 - \exp V)$ は負であるから、 w^* が小さい領域では関数 f は増加し、 w^* がある値を越えると f は減少する。 w^* は正で W に対して単調減少であるから、 f は W についてはじめに増加し、後に減少する。これと $K(t)$ との2つの交点を W_1 、 W_2 とすると、最適制御は以下のように与えられる。

$W < W_1$ ならば、 $u^* = 0$ (施設に投資)

$W_1 < W < W_2$ ならば、 $u^* = 1$ (イベントに投資)

$W_2 < W$ ならば、 $u^* = 0$ (施設に投資)

施設効用が低い間は、施設整備に全力で投資して施設の評価を高め、一定の水準を越えればイベントに投資してその集客効果を期待すればよい。 $W(t)$ がさらに大きくなった場合に施設整備に投資することが望ましいのは、当該地域が周囲より評判を高めた結果、集客シェアが頭打ちになり、もはやイベントの集客力が発揮される余地がなくなるためと考えられる。このような状況においてはシェアを高めることよりも、むしろ影響圏を広げることなどに努力が向けられるものと思われる。

結論として、実際においては施設が与える効用についてアンケートを逐時行ない、その資料を頼りに投資配分比を変更することによって最適投資制御を行なうことができる。

4. おわりに

イベントを取り入れた地域整備について、動的、かつ規範的な最適事業投資案が求められた。今後、実証分析、および質的側面からの研究成果を織りまぜるなどして研究を進展させたい。その一つとして、微分ゲーム理論を用いた、複数開発地の競争、協調の方法についての研究が挙げられる。

参考文献

- 1) 肥田野登：地域整備過程に関する開発速度論的研究，第3回土木計画学研究発表会講演集，pp. 363～380，1981. 1.
- 2) ポントリヤーギン他，関根智明訳：最適過程の数学的理論，文一総合出版，1967