線形分散関係式の近似式について

大阪工業大学　正員　後野　正雄

まえがき　：　微小振幅波理論において分散関係式で定義される波数を求めることは必要不可欠である。しかしこの分散関係式は超越方程式の一種であり、これを解いて、波数を求めるためにはかなりの手数が必要である。このため、これまでにいくつかの波数の近似式が提案されている。もちろん、最近ではパソコン、あるいは、プログラム電卓を用いて手軽に波数を求めることができる。しかし、規模の大きな計算が大型計算機からパソコンに移行しつつあり、現在においても良質の近似式が計算時間の短縮に果たす役割は軽視できるものではない。分散関係式の近似式に期待される特性としては、①簡便性、②高精度、③適用範囲の広さがあげられる。このうち、①と②は相反する性質を示すことが多い。しかし、実際に近似式を使う場合を考えてみると、必ずしも簡便でかつ高精度である必要はない。波長、波数の概略値のみが必要とされる場合もあり、このときは簡便性が重要となるであろう。逆に、波向線法などを用いて、パソコン等で波の変形計算を行う場合には、当然、精度の高さが要求される。従って、本研究では、簡便性を重視した近似式から、精度の高いものまで、いくつかの近似式について検討を行う。

なお、以下の表示を簡潔にするため、沖波の波数 k_o（$2\pi/L_o$）と水深 h の積を x、水深 h での波数 k と水深 h の積を y とする。従って、x と y が満たすべき分散関係式は次式で与えられる

$$x = y \cdot \tanh y \qquad (1)$$

ここで、　$x = k_o h$　；　$y = kh$　である。

既往の研究　：　Hunt (1979) はＰｅｄè近似を用い、$x<\infty$ の範囲で精度の高い近似式を提案している。これに対して、Venezian (1980) は $0<x<2$ の範囲においてさらに精度の高い近似式を示している。しかし、Hunt, Venezianの式は８桁以上の係数を６つ用いなければならず、プログラム内でしか用いることはできない。Venezianはこの点に対して、$x<1$ の範囲ではあるが、誤差0.04%以下の次のような簡便な式を提案している。

$$y = \frac{\sqrt{x}}{1 - x/6} \qquad (2)$$

Wu & Tornton (1986) は(2)式と類似の式を提案しているが、適用範囲は $x<1$ である。また Nielsen (1982) は h/L_o を用いた近似式を提案している。この式は $x<1$ の適用範囲で、誤差は 1% と大きいが、波数だけではなく、浅水係数なども近似式で表しており、この点では実用的であると思われる。

既往の研究の問題点としては、高精度で適用範囲の広い近似式は複雑な係数を数多く含み、プログラム内でしか用いることができない。また、(2)式のように簡便な式は適用範囲が狭い。ただ、$x<1$（$h/L_o<$ 約0.16）という範囲は波数の計算頻度が高く、実用的には非常に重要な領域であることはまちがいない。

新しい近似式 － 簡便式　：　本研究で提案する、簡便な波数の近似式は (3)式、(4)式の２種類である。式中のｓｉｎは全てラジアンで計算するものとする。この２種類の近似式は y（kh）の推定精度が異なっており、使用目的に応じて使い分けることができる。図１と図２はこれらの式で求めた y と真値 y^* の相対誤差

$$y = \frac{x}{\sin\sqrt{x}} \qquad x < \pi \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x}{\sin\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{50}\sin\frac{x^2}{2}\right) && x < 2 \qquad (4.1)\\ y &= x(2 - \tanh x) && x > 2 \qquad (4.2)\end{aligned}\right\}$$

Masao NOCHINO

（％表示）とxとの関係を示したもので、図１には(3)式、図２には(4)式による結果を示してある。横軸にはxを用い、$x=\pi$まで表示している。図１より、(3)式は$x\fallingdotseq 2$において最大誤差約２％を示すことがわかる。しかし、その適用範囲は$x<\pi$であり、既往の近似式に比して精度の点では見劣りするが、適用範囲が広くなっていることがわかる。$x=\pi$は$h/L_o=1/2$と同じであり、$x<\pi$が浅海域を示していることは言うまでもない。すなわち、$x>\pi$においては、従来通り、$y=x$を近似式として用いることができる。一方、(4)式は、$x\lesseqgtr 2$で使用する式が異なるという欠点はあるが、$0<x<\infty$ の適用範囲を有し、最大誤差は０.３％と精度の良い式となっている。これらの近似式の特徴の一つとしてyとxが同次数になっていることがあげられる。すなわち、これらの式は波長を直接表す式に簡単に書き換えることができる。例えば、(3)式を書き換えると次のようになる。

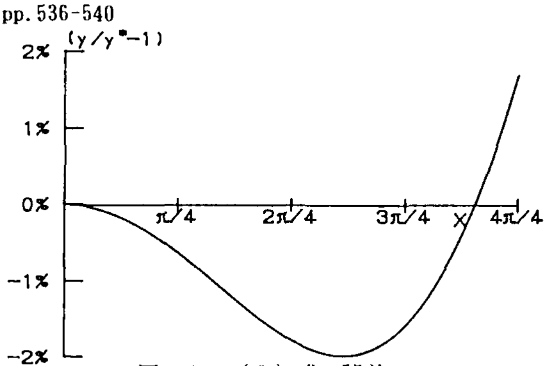
$$L = L_o \sin\sqrt{x} \qquad (5)$$

あるいは、波の周期Tを用い、$\pi^2=9.8$を利用すると次式のようになる。

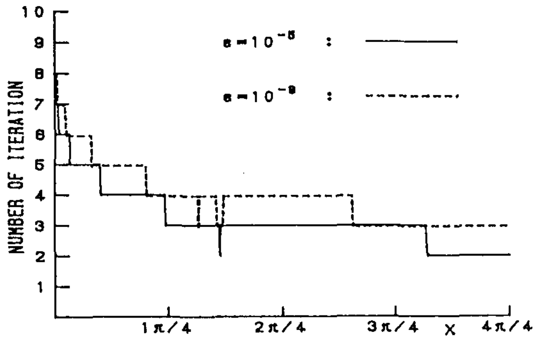
$$L = 1.56T^2 \sin\sqrt{4h/T^2} \quad (\text{m}\cdot\text{sec単位}) \qquad (6)$$

<u>ニュートン法に対する検討</u>　：　計算機においては、分散関係式をニュートン法を用いて解き、波数を求めることが多い。このとき、ニュートン法の初期値としては$y=x$を用いるのが一般的である。図４は$y=x$を初期値とし、相対誤差ε（$=|y_n/y_{n+1}-1|$、nは繰り返しの回数、初期値はn＝０）を10^{-5}及び10^{-9}としたときの収束までの繰り返し回数nとxの関係を示したものである。この図より、$x<1$において収束までの繰り返し回数が急激に大きくなっていることがわかる。一方、図４は初期値として(4) 式を用いた場合の収束までの繰り返し回数を示したものであり、図３と比較することにより、ニュートン法を用いた計算効率が大幅に改善されていることがわかる。

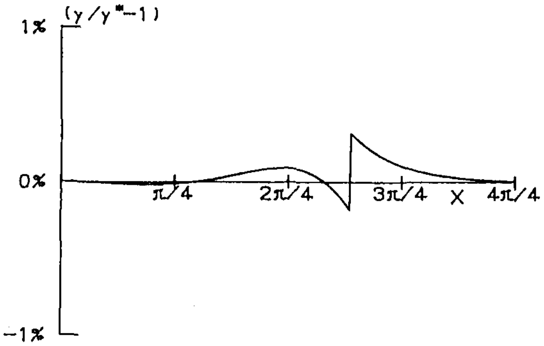
References: Hunt, J.N.(1979);"Direct solution of wave dispersion equation", ASCE, vol.105, WW4, pp.457-459 : Nielsen, P.(1982);"Explicit formulae for practical wave calculation", Coastal Eng., vol.6, pp.389-398 : Venezian, G.(1980);"Discussion to Hunt(1979)", ASCE, vol.106, WW4,pp.501-502 : Wu, C.S. & E.B. Thornton(1986);"Wave numbers of linear progressive waves", ASCE, vol.112, WW4, pp.536-540



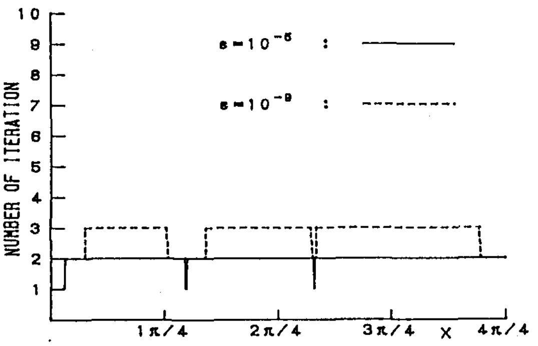
図－１　（３）式の誤差



図－３　$k_o h$を初期値とした反復回数



図－２　（４）式の誤差



図－４　（４）式を初期値とした反復回数