

蛇行水路における流れの境界条件について

立命館大学理工学部 正員 ○ 小沢功一
 東京大学工学部 正員 玉井信行

1. まえがき 蛇行水路の流れにおいては主流速度が鉛直方向に、あるいは流下方向に分布していることも関係して二次流が発達してくる。この二次流によって河床の砂が横断方向へ運ばれ、河床の局所的な洗掘につながることもある。

河床の洗掘や堆積の量・位置を知るためにも或いは側岸の浸食の状況をとらえるためにも流れの主流、二次流の流下方向への遷移、横断方向への分布等を正確に把握することが必要である。

主流や二次流の状況を知るには、一つには摂動法によって解析解を得ることである。この解についてはこれまで摂動パラメータに関して0次～3次まで求められている。^{1), 2)} 主流の解を求める際の境界条件としては、計算の対象である領域の上流端での主流の横断方向への分布を用いている。この分布については、実測値から最小二乗法により係数を決めることが出来るが、実測値を用いることなく決めることが出来ればその方が望ましい。

2. 流れの基礎式 流れの基礎式については水深平均流速を用いて連続条件、流下方向、横断方向の運動量方程式及び断面の流量式を示すと次のようである。

$$\frac{\partial h_t \bar{u}_s}{\partial s_a} + \frac{\partial h_t \bar{u}_n}{\partial n_a} + \frac{h_t \bar{u}_n}{r_a} = 0 \dots (1)$$

$$\frac{\partial h_t \bar{u}_s^2}{\partial s_a} + \frac{\partial h_t \bar{u}_s \bar{u}_n}{\partial n_a} + 2 \frac{h_t \bar{u}_s \bar{u}_n}{r_a} + g h_t \frac{\partial h_a}{\partial s_a} + g h_t \frac{\partial z_h}{\partial s_a} + \frac{\tau_{s0}}{\rho} = 0 \dots (2)$$

$$\frac{\partial h_t \bar{u}_s \bar{u}_n}{\partial s_a} + \frac{\partial h_t \bar{u}_n^2}{\partial n_a} + \frac{h_t (\bar{u}_n^2 - \bar{u}_s^2)}{r_a} + g h_t \frac{\partial h_a}{\partial n_a} + \frac{\tau_{n0}}{\rho} = 0 \dots (3)$$

$$\int_{-B_0/2}^{B_0/2} h_t \bar{u}_s d n_a = V H_0 B_0 \dots (4)$$

ここに $\bar{u}_s, \bar{u}_n$ はそれぞれ s_a, n_a 方向の水深平均流速、 r_a は s_a 軸の曲率半径、 ρ は水の密度、 h_t は水深、 τ_{s0}, τ_{n0} は底面における s_a, n_a 方向のせん断応力、 V は断面平均流速、 H_0 は平均水深、 B_0 は水路幅を表している。

摂動法により解析解を求めるには、これらの基礎式を

無次元化し変数 $u(=\bar{u}_s/V), v(=\bar{u}_n/V), h(h_a/H_0)$ について $u=u_0+\epsilon u_1+\epsilon^2 u_2+\epsilon^3 u_3+\dots, v=v_0+\epsilon v_1+\epsilon^2 v_2+\epsilon^3 v_3+\dots, h=h_0+\epsilon h_1+\epsilon^2 h_2+\epsilon^3 h_3+\dots$ のように摂動パラメータ $\epsilon(=B_0/2R)$ を用いて展開した式を代入する。そして ϵ についてそれぞれの次数ごとにまとめた式から各次数の解析解を求めていく。このときの境界条件は a) 側岸; $n=\pm 1$ で $v=0 \dots (5)$ b) 上流端; $s=s_0$ で $u=u_1(n) \dots (6)$ c) 下流端; $s=s_d$ で $(1/2) \int_{-1}^1 h d n = 1 \dots (7)$ とする。

3. 上流端における境界条件 蛇行水路としては図-1のようないわゆるsine-generated曲線に従う形状を考える。このような水路で河床が平坦な場合、側岸に近い位置での主流速度の流下方向への分布は凸岸近くで速くて凹岸近くで遅い。従って解析解の計算区間の上流端の位置としては、凸岸と凹岸の中間が望ましい。この位置での横

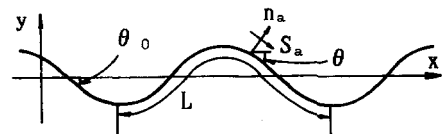


図-1 座標軸

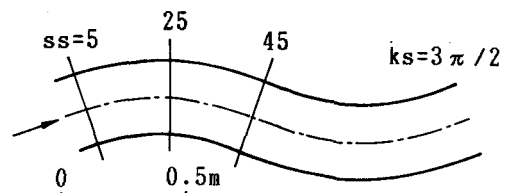


図-2 水路図

Koichi OZAWA, Nobuyuki TAMAI

断方向への分布としては湾曲流としての影響がそれほど現れていなくて、比 $n=1$ 較的一様な形をとるからである。

すなわち上流端としては図-2の $ks=-\pi/2$ の位置とし、計算区間は一蛇行分の $ks=3\pi/2$ までとする。上流端における主流速の横断分布としては、摂動法の0次成分として一様流を考える。1次、

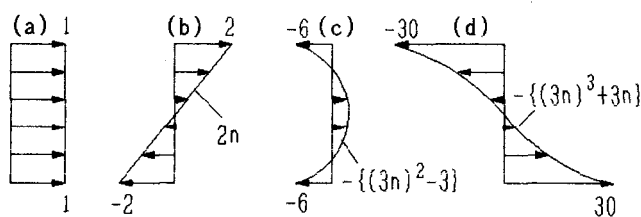


図-3 上流端の次数ごとの速度分布

2次、3次成分としてはそれぞれ強制渦型、せん断摩擦の影響を考慮した分布、強制渦型とは逆方向の分布とする。式で表すと $u_1=u_{10}+\varepsilon \cdot 2nu_{11}-\varepsilon^2\{(3n)^2-3\}u_{12}-\varepsilon^3\{(3n)^3+3n\}u_{13}\cdots(8)$ となる。それぞれの項について図に現すと図-3の(a)~(d)のようである。ここに $k=(2\pi/L)R$, L は蛇行長, R は最小曲率半径 $(=L/2\pi\theta_0)$, θ_0 は最大偏角, u_1 は u_0/V の上流端での値, $s=s_c/R$, s_c は水路中央の流下方向への座標, $n=n_a/(B_0/2)$, $u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}$ は上流端での主流速の摂動展開したときのそれぞれ0,1,2,3次成分である。

実験に使用した水路 ($\varepsilon=0.195$) の場合, $u_{11}\sim u_{13}$ の値がすべて u_{10} の1に等しいとして左岸 ($n=1$)、水路中央 ($n=0$)、右岸 ($n=-1$) でのそれぞれの u_1 の値を比較すると表-1のようである。また $u_{11}=0.5$ として他の u_{1j} は1に等しいとして同様に計算すると表-2のようになる。表-2の u_1 の横断方向への値の分布はほぼ妥当であろうと考えられる。

表-1 上流端における各項の値 (1)

$$u_{10}=u_{11}=u_{12}=u_{13}=1 \quad (\varepsilon=0.195)$$

n	0次項	1"	2"	3"	u_1
1	1	0.390	-0.228	-0.222	0.940
0	1	0	0.114	0	1.114
-1	1	-0.390	-0.228	0.222	0.604

表-2 上流端における各項の値 (2)

$$u_{10}=1, u_{11}=0.5, u_{12}=u_{13}=1 \quad (\varepsilon=0.195)$$

n	0次項	1"	2"	3"	u_1
1	1	0.195	-0.228	-0.222	0.745
0	1	0	0.114	0	1.114
-1	1	-0.195	-0.228	0.222	0.799

4. あとがき 上流端における主流速の横断方向への分布を式(8)のように仮定し, $u_{10}=1, u_{11}=0.5, u_{12}=u_{13}=1$ として摂動法による解析解を求め、1次解 $u=u_0+\varepsilon u_1$, 2次解 $u=u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_{12}$, 3次解 $u=u_0+\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_{12}+\varepsilon^3 u_{13}$ について計算し図示すると図-4のようである。ここに u_0 は $u_0=1$ であるが u_1, u_2, u_3 は s, n の関数である。図-(a)は $ss=5$, (b), (c) はそれぞれ $ss=25, 45$ の位置での横断方向への分布を現している。 $ss=100(s_c/L+1/4)$ としているから, $ss=5$ は $ks=-\pi/2+\pi/10$, $ss=25$ は $ks=0$, $ss=45$ は $ks=\pi/2-\pi/10$ に相当している。

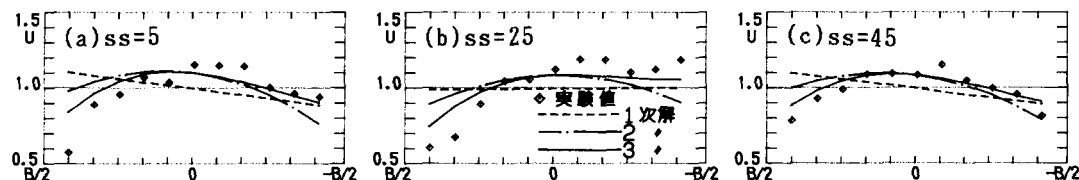


図-4 横断速度分布

主流速の測定値の横断方向への分布は、図から明らかなように水路中央部で値が大きくなる上に凸の形になる。解析解の次数が上がるほど測定値への対応は良くなっている。

式(8)の分布形と測定値とを比較して、最小二乗法により $u_{11}\sim u_{13}$ の値を求めると $u_{11}=0.412, u_{12}=1.28, u_{13}=1.43$ となる。これらの値を用いた解析解で計算した値は実測値にさらに近くなるものと思われる。

参考文献 1) 池内幸司・玉井信行:蛇行水路における水深平均流れ場の遷移特性,土木学会論文報告集,第334号, pp.89-101, 1983. 2) 小沢功一・玉井信行:蛇行水路における流れの横断速度分布,講演概要集, 1989.