自由水表面を有した流れ　－　数値計算法について

大阪大学大学院　学生員○中辻陽一
大阪大学工学部　正　員　中辻啓二
大阪大学工学部　正　員　室田　明

1．はじめに

高次乱流モデルの導入により水理学の数値計算の精度が向上したように思われるが、未解決のまま残されている問題点は数多い。その一つとして土木水理学固有の問題である自由水表面の取り扱いがある。経験的にいえば、乱流輸送量の正確な評価を行なう以前に、平均量である圧力場を、換言すれば水位変動量を正確に表現することは必須項目である。自由水表面を計算する方法としてこれまで主に二つの方法が用いられてきた。一つは rigid lid 法であり、いま一つは水位上昇量を直接計算する方法である。著者ら(1989)も代数的応力モデルやｋ－εモデルにおいて後者の水位上昇量を計算する方法を用いた。この方法の利点は自由水表面の変化を精度よく解析できるという点である。しかし、この方法では静水圧近似を用いるのが一般的であるため、高精度な乱流モデルを展開する際にはこの静水圧近似は大きな矛盾を生み出すことになる。一方、rigid lid 法は水面に蓋をして水位上昇量を圧力に変換して評価するものであり、水位上昇量を議論したり、大きな水位変化を計算する場合には不適当である。本研究ではそれらの両方法の欠点を補い改良するために、Shu et al.(1989)の HH-SIMPLE アルゴリズムを適用して静水圧と動圧とを個別に求める方法を紹介し、表層均質噴流への適用例を示す。

2．基礎方程式

二次元の流動を考えると非圧縮性ならびに、ブーシネ近似を用いると、連続方程式及び運動方程式は以下のようになる。なお、静水圧近似は用いない。

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+W\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(-\overline{u^2})+\frac{\partial}{\partial z}(-\overline{uw}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}+U\frac{\partial W}{\partial x}+W\frac{\partial W}{\partial z}=g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}(-\overline{uw})+\frac{\partial}{\partial z}(-\overline{w^2}) \tag{3}$$

ここで、ｘは流下方向、ｚは鉛直下向きを正とした。式（１）～（３）においてＲＳＭ乱流モデルによりレイノルズ応力を求めれば、未知量は流下方向流速Ｕと鉛直方向流速Ｗ、そして圧力Ｐである。

3．圧力の算定

このモデルの特色は圧力を静水圧と動圧とに分離することにある。つまり、

$$P=P_s+P_d \tag{4}$$

また、静水圧は水表面の運動学的な境界条件よって、水位上昇量ξを求めることにより次式で表現できる。

$$P_s=\rho g(\xi(x,t)+z) \tag{5}$$

式（４）をｘ方向およびｚ方向に微分すると、圧力のｘ、ｚ方向勾配は次式となる。

Youichi NAKATSUJI, Keiji NAKATSUJI, Akira MUROTA

$$-\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{\partial P_d}{\partial x}-\rho g\frac{\partial \zeta}{\partial x} \tag{6}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z}=-\frac{\partial P_d}{\partial z}-\rho g \tag{7}$$

さて、水表面における運動学的な境界条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+U_s\frac{\partial \zeta}{\partial x}=-W_s \tag{8}$$

ここで、添字ｓは水表面を表す。

さらに、連続方程式（１）を底面から自由水表面ζまで積分することにより、

$$\frac{\partial H\overline{\overline{U}}}{\partial x}-U_s\frac{\partial H}{\partial x}-(W_s-W_b)=0 \tag{9}$$

ここにH（$=\zeta+H_b$）は全水深（H_bは静止水面から底面までの水深）、W_bは底面における鉛直方向流速、$\overline{\overline{U}}$は水深方向に積分した流下方向断面平均流速である。式（９）に式（８）を代入すると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial(\zeta+H_b)\overline{\overline{U}}}{\partial x}=-W_b \tag{10}$$

したがって、式（１０）より水位上昇量ζが算出され、式（５）から静水圧P_sを決定することができる。

一方、動圧P_dの算定には式（２）および式（３）より得られるP_dに関するポアソン方程式を解くことにより求める。つまり、ｘで偏微分した式（２）とｚで偏微分した式（３）とを加え合わせて、式（１）、式（６）ならびに式（７）を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_d}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P_d}{\partial z^2}=&-\frac{\partial D}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}U\frac{\partial U}{\partial x}+W\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}U\frac{\partial W}{\partial x}+W\frac{\partial W}{\partial z}\\&-\rho g\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(-\overline{u^2})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(-\overline{uw})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(-\overline{w^2})\end{aligned} \tag{11}$$

ζならびに乱流諸量が既知であれば、上式をＳＯＲ法により計算することによりP_dの計算が可能となる。ここに、Dは膨張項であり、式（１）の左辺である。式（１）、（２）、（３）および式（１０）、（１１）より未知数U，W，P_d，P_s，ζを得ることができる。

4．計算の内容

計算は二次元表層均質噴流に対して行なった。計算領域および放流口条件は室田ら(1989)に倣った。

また、境界条件は数値解析を行う上で最も重要な要因の一つであるが、水表面の境界条件はこれまで自由水表面を直接計算する場合は水表面で大気圧とし、rigid lid 法では$\partial P_d/\partial z=\rho g$として計算を行ってきた。そこで、今回採用した境界条件は以下に示すとおりとする。

放流口：$\partial P/\partial x=0$，$U=U_0(z)$，$W=0$　　上流端：$\partial P/\partial x=0$，$U=0$，$\partial W/\partial z=0$

下流端：$\partial P/\partial x=0$，$\partial U/\partial x=0$，$W=0$　　底　面：$\partial P_d/\partial z=0$，$\partial U/\partial z=0$，$W=0$

水表面：$\partial P_d/\partial z=0$，$\partial U/\partial z=0$，$W=0$

なお、計算結果の詳細は発表時に示す。

参考文献：Zhou,S.P. and Shu,N (1989) ; Application of the HH-SIMPLE algorithm for the numerical simulation of some free surface flow problems for 3-dimensional situation, Hdr. and Envion. Modelling of Coastal, Estuaries and River Waters, Gower Technical, pp.111-122.

室田・中辻・藤崎 (1989) ; 乱流モデルの成層せん断流への適用、第３３回水理講演会論文集、pp.538-588.