クラック問題に於ける2,3の積分方程式法の定式化について

京都大学工学部 正 小林昭一
京都大学工学部 正 ○西村直志
京都大学大学院 学 細田直文
東京大学大学院 学 吉田秀典

1．序

二重層ポテンシャルを用いた積分方程式法によるクラックの解析に於いては通常形状関数として区分的に const. の系統か C^1 エレメントを用いる．前者ではクラック近傍の応力解析精度が著しく悪いが，後者を 3 次元問題に於いて用いることは一般には困難である．そこで本報では二重層ポテンシャルを用いながらも C^0 エレメントの使用が許される2,3のクラック解析法を提案しその適用性を検討する．

2．定式化

簡単のため無限領域に於ける 3 次元静弾性問題を考え，クラック S は平面であるとする．S が traction free であれば次の積分方程式が得られる：

$$\text{p.f.}\int_S n_j C_{ijkl}\Gamma_{kp,lq}(x-y)C_{pqrs}n_s\varphi_r(y)dS_y = (\overset{n}{T}u^\infty)_i := C_{ijkl}n_ju^\infty_{k,l}$$

ここに n は S の単位法線ベクトル，u^∞ は無限遠に於ける変位場であり，φ は開口変位である．この式に含まれる核の hypersingularity は $\Gamma_{ij,kl}(x-y)$ に対する応力関数 Φ を用いて次のように取り除かれる：

$$\text{p.f.}\int_S e_{iap}e_{kcr}\Phi_{abcd,pr}(x-y)e_{jbq}n_j\frac{\partial}{\partial y_q}\left(e_{lds}n_l\frac{\partial}{\partial y_s}\varphi_k(y)\right)dS_y = (\overset{n}{T}u^\infty)_i \tag{1}$$

ここに，p.f. は開口変位の tip での特異性による．Φ の異方性の場合の一般形は Fourier 域では求められている[1]．上式の変分方程式を書き下し，test function を S 上の領域 S_0 の特性関数とすれば

$$-\int_S\left(\oint_{\partial S_0}e_{iap}e_{kcr}\Phi_{abcd,pr}(x-y)dx_b\right)e_{lds}n_l\frac{\partial}{\partial y_s}\varphi_k(y)dS_y = \int_{S_0}(\overset{n}{T}u^\infty)_i(x)dS_x \tag{2}$$

を得る．式(2)に於ける線積分は n 方向に右ねじを回す向きである．なお，(2)は任意の曲面クラックに於いても成り立つ．

3．式(1)を用いた数値解析

式(1)に於いて φ を直接有限要素補間するならば C^1 要素が必要になる．C^0 要素を使うには Polch らに習い $\varphi, \nabla\varphi$ の両方を独立に補間するのが簡単である[2]．いま n 方向を x_3 とする直交直線座標を取り

$$\varphi(x)\approx\sum_I N^I(x)\varphi^I, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi\approx\sum_J M^J(x)\varphi^I_\alpha \quad (\alpha=1,2) \tag{3a, b}$$

とする．ここに N, M は形状関数であり，quarter element の方法によって tip でそれぞれ $r^{1/2}$, $r^{-1/2}$ の特異性を持つようにする．パラメータ φ^I, φ^I_α は[2] の方法を改良し，

$$\sum_J\int_S M^I(x)M^J(x)w(x)dS_x\varphi^J_\alpha = \sum_J\int_S M^I(x)N^J_{,\alpha}(x)w(x)dS_x\varphi^J \tag{4}$$

を解いて関連付ける．ここに w は tip で $r^{1/2}$ の挙動をする重み関数であり，例えば quarter element を用いるならばアイソパラメトリック変換の Jacobian 等を用いればよい．後は(1)を(3b)の補間を用いて離散化

Shoichi KOBAYASHI, Naoshi NISHIMURA, Naofumi HOSODA, Hidenori YOSHIDA

し，(4) を用いて未知数を φ^I に書換え，最後に collocation を用いればよい．なお M については [2] で示されたものから，tip で本来は有り得ないコンスタント項を取り除いたものを用いるのがよい．

4．式(2) を用いた数値解析

等方静弾性に於いては $\Phi_{ijkl}(x-y)$ は Lame 常数 λ,μ を用いて

$$\Phi_{ijkl}(x-y) = -\frac{\mu}{8\pi(\lambda+2\mu)}\left(2\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + (\lambda+2\mu)(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\right)|x-y| \qquad (5)$$

と書ける．一方 S を区分的に平面で近似する事が許されるならば，(2) の S_0 も区分的に平面とする事が出来，∂S_0 は区分的に折れ線となる．従って (2) の線積分は $(t=(x_2-x_1)/|x_2-x_1|)$

$$\int_{x_1-x_2}|x-y|ds_y = \frac{X_1r_1-X_2r_2}{2}+\frac{r_1^2-X_1^2}{2}\log\left(\frac{r_1+X_1}{r_2+X_2}\right),\quad \begin{array}{l} r_i=|x-x_i|, \\ X_i=(x-x_i)\cdot t \end{array} \qquad (i=1,2)$$

を用いれば微分のみによって解析的に計算される．式(2) に含まれる残りの積分は高々log の特異性を有するのみであり，通常の Gauss 積分を若干修正したもので評価できる．但し，この方法では tip の singularity を解析に取り入れることが重要である．

5．数値解析例

図1,2 にそれぞれ (1) 及び (2) による数値解析例を示した．両ケースともに Poisson 比 ν は 1/4 であり無限遠から一様な大きさ τ_0 のクラックに垂直な応力を受ける場合を解析した．図1 は半径 a の円形クラックであり，(1) を 54 個の 8 節点アイソパラメトリック要素を用いて離散化した．中央の開口変位の精度は約3%であった．図2 では一辺が長さ $2a$ の正方形クラックを (2) の方法で解析した．基本的には 4 節点のアイソパラメトリック要素を使い tip の singularity は座標変換で導入した．

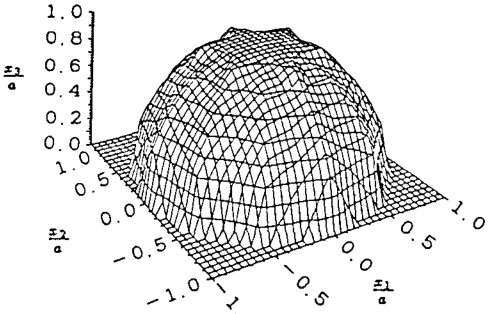

Fig.1: (1) による解析例

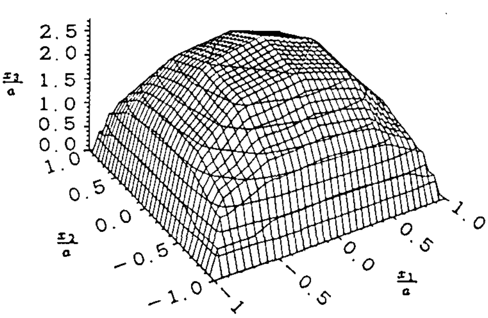

Fig.2: (2) による解析例

参考文献

[1] Bécache, E., Nédélec, J.-C., & Nishimura, N.(1989): rapport interne N° 205 du CMAP, l'X.

[2] Polch, E.Z., Cruse, T.A. & Huang, C.-J.(1987): Comp. Mech., 2, 253-267.