時間域積分方程式法による3次元ランニングクラックの動的解析

NKK 正 ○中村信秀*
京都大学工学部 正 小林昭一**
京都大学工学部 正 西村直志***

1．まえがき

3次元ランニングクラックの動的解析を行うために境界積分方程式法[1)]と言う数値解析手法を用いる。この方法は3次元問題，無限問題において特に有効であるため，本解析にこの手法は適していると言える。具体的には波動方程式を満足するような領域中に円盤状クラックがある場合について解析をした。さらに簡単ではあるが，動弾性問題も同様に扱えばよいことについても言及している。

2．定式化

今考える領域 D を $R^3 \setminus S$とし，滑らかな縁∂Sを持つ閉曲面Sをクラックとする。この時次のような初期値境界値問題を考える。

支配方程式

$$\triangle u - \frac{1}{c^2}\ddot{u} = 0 \quad \text{in } D \quad (c\text{: 定 数}) \tag{1}$$

初期条件

$$u(\tilde{x},0) = 0 \quad , \quad \dot{u}(\tilde{x},0) = 0 \tag{2}$$

境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{n}}(\tilde{x},t) = 0 \quad \text{on } S \tag{3}$$

放射条件

$$u - u_I = 0 \quad |\tilde{x}| > ct + d \quad (d\text{: 定 数}) \tag{4}$$

を満足するような$u(\tilde{x},t)$ を求める。ここで$\tilde{n}$はS上の単位法線ベクトル，u_Iは入射波による変位を表している。この様な$u(\tilde{x},t)$ は次の二重層表示を有する。

$$0 = u(\tilde{x},t) + \int_0^t \int_S \frac{\partial \Gamma}{\partial \tilde{n}(\tilde{y})}(\tilde{x}-\tilde{y},t-s)\phi(\tilde{y},s)dS(\tilde{y})ds \quad \tilde{x} \notin S, \in D \quad \tilde{y} \in S \tag{5}$$

ここで$\Gamma(\tilde{x}-\tilde{y},t-s)$ は基本解と呼ばれ，

$$\triangle \Gamma(\tilde{x}-\tilde{y},t-s) - \frac{1}{c^2}\ddot{\Gamma}(\tilde{x}-\tilde{y},t-s) = -\delta(\tilde{x}-\tilde{y})\delta(t-s) \tag{6}$$

を解いて得られる。またϕはクラックの部分でのuの不連続量で開口変位と呼ばれる。次に式(6) に$\frac{\partial}{\partial \tilde{n}}$を作用させ,$\tilde{x}$ をS上に持っていくと境界条件より

$$0 = \frac{\partial u_I}{\partial \tilde{n}}(\tilde{x},t) + p.f. \int_0^t \int_S \frac{\partial^2}{\partial \tilde{n}(\tilde{x})\partial \tilde{n}(\tilde{y})}\Gamma(\tilde{x}-\tilde{y},t-s)\phi(\tilde{y},s)dS(\tilde{y})ds \tag{7}$$

ここで$p.f.$は積分の有限部分をとると言う意味である。こうして得られる積分方程式(8) を離散化して解くことになる。動弾性問題についても同様な積分方程式が得られ

$$0 = T(\tilde{x})u_I(\tilde{x},t) + p.f. \int_0^t \int_S T(\tilde{x})T(\tilde{y})\Gamma(\tilde{x}-\tilde{y},t-s)\phi(\tilde{y},s)dS(\tilde{y})ds \tag{8}$$

*Nobuhide Nakamura, ** Shoichi Kobayashi, *** Naoshi Nishimura

TはTuとするとトラクションを表すような作用素であり具体的には次の様になる。

$$T_{ik}(\tilde{x}) = C_{ijkl}n_j(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial x_l} \quad , \quad T_{ik}(\tilde{y}) = C_{ijkl}n_j(\tilde{y})\frac{\partial}{\partial y_l} \tag{9}$$

式(7), (8) に含まれる基本解の２階微分は特異性が高くそのままでは数値計算には適さないため正則化をしてやる必要がある[2]。そこで基本解の陽な形をそのまま用いず別の形に変形しなおすと式(7) は次のようになる。

$$0 = \frac{\partial u_I}{\partial \tilde{n}(\tilde{x})} + \int_0^t \int_S (n_j(\tilde{x}) - n_j(\tilde{y}))e_{jbc}\frac{\partial}{\partial x_b}\Phi n_i(\tilde{y})e_{iac}\frac{\partial}{\partial y_b}\phi dS(\tilde{y})ds +$$

$$+p.f. \int_0^t \int_S e_{iac}e_{jbc}\Phi\frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b}\phi n_i n_j dS(\tilde{y})ds - \frac{1}{c^2}\int_0^t \int_S n_i(\tilde{x})\Phi\ddot{\phi}n_i(\tilde{y})dS(\tilde{y})ds \tag{10}$$

$$\text{ここに} \qquad \Phi = \frac{\delta(t - s - \frac{|\tilde{x}-\tilde{y}|}{c})}{4\pi|\tilde{x} - \tilde{y}|} \tag{11}$$

３．離散化

開口変位の形状関数として時間方向には線形要素を用い，空間方向には一定要素を用いている。また要素分割は半径方向のみに分割したリング要素を用いている。(*fig*.1)

４．計算結果及びあとがき

fig.2 に簡単な計算例を示している。この図は波動方程式の場合について計算したものであり，半径方向に沿った開口変位の時間変化を表している。ここで分割数５，時間ステップ数20, 先端の進む速さを0.3cとしている。

この様に積分方程式法を用いてランニングクラックの解析を行うことができる。ここでは波動方程式についてのみ計算を行ったが動弾性問題についても同じく計算できる。ただしリング要素を用いるときには円周方向に開口変位が一定となる様な入射波しか扱えない。

（参考文献）

1) 奥村康博:「時間域積分方程式法による３次元クラックの動的解析」1989 京都大学修士論文

2) 西村直志，小林昭一:「弾性学に於ける二重層ポテンシャルの微分の正則化について」1987 境界要素法シンポジウム論文集

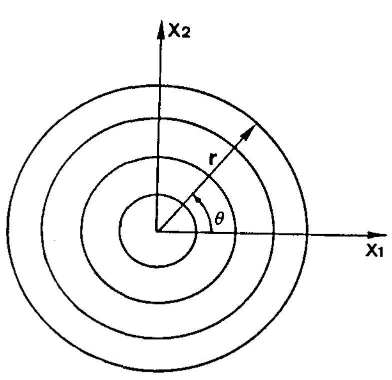

fig.1

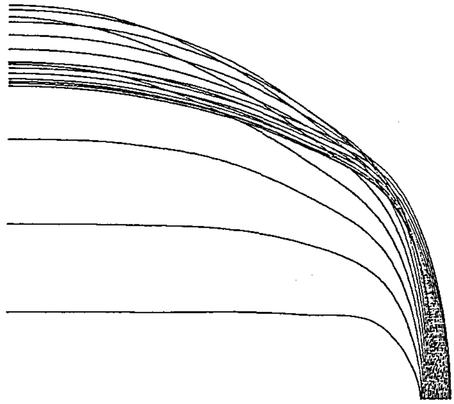

fig.2