積分方程式法を用いたクラックの位置・形状決定問題

中部電力 ○正会員 神谷泰範, 京都大学工学部 正会員 西村直志, 正会員 小林昭一

1．はじめに

積分方程式法はクラック問題に対して有効な解法であり、これまでに種々の問題が取り扱われてきた。しかしながらこれまでに扱われてきた問題は順問題であり、クラックの位置及び形状を決定する逆問題に関しては、ほとんど研究が行われていない。クラック位置・形状決定問題は工学上非常に重要な問題であり、本報告では積分方程式法を用いた数値解析により、この問題を特にLaplace方程式に支配される2次元クラック問題（例：モードIII等方静弾性，未知量＝変位）を通して考える。

2．クラック位置・形状決定問題

2．1 解析方法　有界領域Dが単一のクラックS（S上でトラクションフリー）を含んでいることはわかっているが、Sの位置及び形状が未知である場合を考える。今Dに複数の変位場を与え、計測により対応する有界領域Dの外部境界S_0上のトラクションを求めたとする。この時クラックSが存在しない時の変位場及びクラックが存在しない時と存在する時とのトラクションの差を、それぞれU^I, φ^I（$I=1\sim N$）とする。これらのデータが満足すべきクラック上の境界条件の制約条件の下に、領域外部境界S_0上の直接法の積分方程式を、最小二乗の意味で最もよく満足するクラックの位置・形状を決定する。

本報告では、まずクラックを直線と仮定してそのおよその位置を決定した後、曲線クラックとして位置・形状をより詳細に決定する方法を用いた。

2．2 積分方程式　上述のように、クラック上の境界条件の制約条件の下に、S_0上の直接法の積分方程式を最小二乗の意味で最もよく満足するクラックSに於いては、次式を満たすS上の関数ϕ^I, λ^Iが存在せねばならない。[1][2]

$$n_i(\boldsymbol{x})g^I_{,i}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial}{\partial s_x}\int_S G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial\phi^I(\boldsymbol{y})}{\partial s_y}dS_y=0,\quad \boldsymbol{x}\in S \tag{1}$$

$$\int_{S_0} n_i(\boldsymbol{x})G_{,i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\left\{f^I(\boldsymbol{y})+\int_S G_{,k}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})n_k(\boldsymbol{z})\phi^I(\boldsymbol{z})dS_z\right\}dS_y+\frac{\partial}{\partial s_x}\int_S G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial\lambda^I(\boldsymbol{y})}{\partial s_y}dS_y=0,\quad \boldsymbol{x}\in S \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\sum_I\frac{\partial\phi^I}{\partial s_x}\left[t_i(\boldsymbol{x})\int_{S_0}G_{,i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\left\{f^I(\boldsymbol{y})+\int_S G_{,k}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})n_k(\boldsymbol{z})\phi^I(\boldsymbol{z})dS_z\right\}dS_y+\int_S n_i(\boldsymbol{x})G_{,i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial\lambda^I(\boldsymbol{y})}{\partial s_y}dS_y\right]\\&\quad-\sum_I\frac{\partial\lambda^I}{\partial s_x}\left\{t_i(\boldsymbol{x})g^I_{,i}(\boldsymbol{x})+\int_S n_i(\boldsymbol{x})G_{,i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\frac{\partial\phi^I(\boldsymbol{y})}{\partial s_y}dS_y\right\}=0,\quad \boldsymbol{x}\in S\end{aligned} \tag{3}$$

$$\sum_I \mathrm{Sif}(\lambda^I)\mathrm{Sif}(\phi^I),\quad \text{at a tip} \tag{4}$$

ここに、$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=-1/(2\pi)\ln|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$、

$$f^I(\boldsymbol{x})=-\int_{S_0}G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi^I(\boldsymbol{y})dS_y,\quad \boldsymbol{x}\in S_0 \qquad g^I(\boldsymbol{x})=-U^I(\boldsymbol{x})-\int_{S_0}G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi^I(\boldsymbol{y})dS_y,\quad \boldsymbol{x}\in S \tag{5)(6}$$

ϕ^IはI番目の計測に対応する開口変位、λ^Iはクラック上の境界条件に対応するLagrange乗数であり、Sifは応力拡大係数を表す。

Hironori KAMIYA, Naoshi NISHIMURA, Shoichi KOBAYASHI

2．3　計算方法　本問題では基本的に(3),(4)をNewton法で解くが、その際$\dot{\phi}^I$, $\dot{\lambda}^I$（$\dot{}$は形状パラメータに関する微分）が必要になる。これらを求めるにはまずあるステップでのSに於て(1),(2)を解きϕ^I, λ^Iを求める。さらに、(1),(2)に形状パラメータに関する微分を施して得られる$\dot{\phi}^I$, $\dot{\lambda}^I$に関する積分方程式を解いて$\dot{\phi}^I$, $\dot{\lambda}^I$を求めればよい。

3．数値計算結果

以上で述べた方法を用いて実際に数値計算を行なった結果、精度良くクラックの位置及び形状を決定することができた。計算例をFig.1，Fig.2に示しておく。Fig.1は第1段階として、クラックを直線に限定して、そのおよその位置を決定する場合の収束の様子を示しており、Fig.2は第2段階として、曲線クラックに対する理論を用い、より詳細にその位置及び形状を決定する場合の収束の様子を示したものである。

4．おわりに

本報告ではLaplace方程式に支配される2次元クラックの位置・形状決定問題を取り扱った。曲線クラック決定に対する理論と直線クラックに対する理論とを組み合わせることによって、仮定したクラックの位置とクラックの正解の位置とが極端に離れていたり、クラックの正解の形状が極端に変形したものでない限り、精度良くクラックの位置及び形状を決定することができた。

仮定したクラックの位置と正解のクラックの位置とが大きく離れている場合には、Newton法を使用している事情から正解の位置に収束しないケースも見られた。この問題に対処するために、Newton法の系統でない非線形計画法を適用する事が、今後の課題の1つとして考えられる。

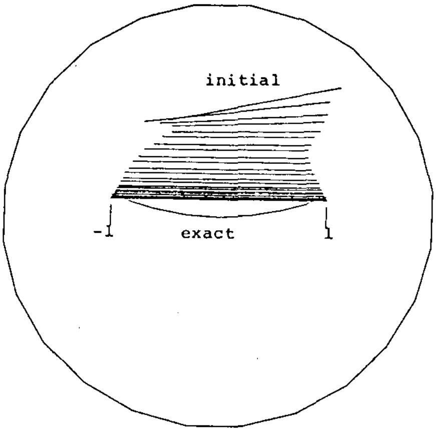

Fig.1

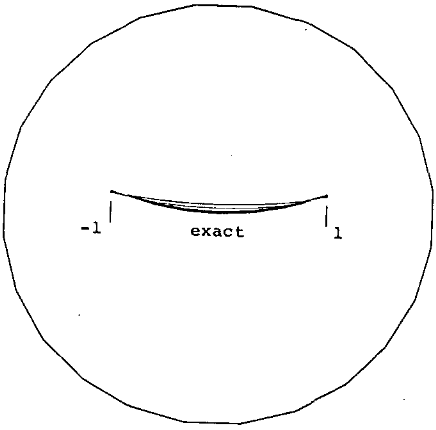

Fig.2

参考文献

[1] N.Nishimura: Regularised integral equations in crack shape determination problems, 自由境界値問題とその周辺，京都大学数理解析研究所講究録，1990

[2] 神谷泰範: 積分方程式法によるクラックの形状決定，京都大学大学院修士論文，1990-2