衝撃荷重を受ける厚円盤の応力波伝播解析

大阪市立大学工学部　正　員　小林　治俊，園田恵一郎
大阪市立大学大学院　学生員　○山本　新，中岡　健一

【1】まえがき

先に[1)]，滑床上の軸対称厚円盤が衝撃荷重を受ける場合を三次元動弾性理論に基づき固有関数展開法による解析を行い，応力波伝播特性を明らかにした．本報告では曲げ変形の効果を考慮し，下面が自由な場合を解析し，その応力波伝播特性を検討するものである．

【2】解析方法

取り扱う軸対称円盤の座標系を図１に示す．等方性軸対称問題の運動方程式は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned} &G\left[\triangle u+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right]=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ &G\left[\triangle w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z}\right]=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここに，G=せん断弾性係数，ν=ポアソン比，ρ=密度，t=時間，$\triangle$=ラプラシアン，$e=(\partial u/\partial r)+(u/r)+(\partial w/\partial z)$

境界条件は，次に様に表せる．

$$\left.\begin{aligned} &w=\sigma_z=0 && (r=b)\\ &\sigma_z=-f(t)q(r),\ \tau_{rz}=0 && (z=-h/2)\\ &\sigma_z=\tau_{rz}=0 && (z=+h/2)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

さて式(1)の解を準静的解(u^S, w^S)と動的解(u^d, w^d)に分けて式(3)の様に表す．

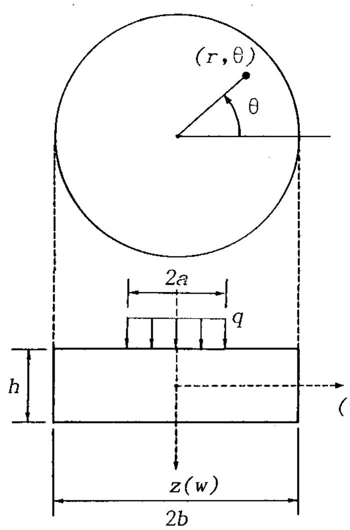

図1　座標系

$$u(\mathbf{r},t)=u^S(\mathbf{r},t)+u^d(\mathbf{r},t),\quad w(\mathbf{r},t)=w^S(\mathbf{r},t)+w^d(\mathbf{r},t)\cdots\cdots\cdots(3)$$

ただし，$\mathbf{r}=(r,z)$．u^S, w^Sは境界条件を満たし次式で表される．

$$u^S(\mathbf{r},t)=f(t)\sum_{m=1}^{\infty}U_m{}^S(z)J_1(\alpha_m r),\quad w^S(\mathbf{r},t)=f(t)\sum_{m=1}^{\infty}W_m{}^S(z)J_0(\alpha_m r)\cdots\cdots\cdots(4)$$

u^d, w^dは未定時間関数$Q_{mn}(t)$と固有関数$U^E{}_{mn}(\mathbf{r})$, $W^E{}_{mn}(\mathbf{r})$により式(5)の様に置く．

$$\begin{Bmatrix} u^d(\mathbf{r},t)\\ w^d(\mathbf{r},t)\end{Bmatrix}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}Q_{mn}(t)\begin{Bmatrix} U^E{}_{mn}(\mathbf{r})\\ W^E{}_{mn}(\mathbf{r})\end{Bmatrix}\quad \text{ただし,}\quad \left.\begin{aligned} &U^E{}_{mn}=U_{mn}(z)J_1(\alpha_m r)\\ &W^E{}_{mn}=W_{mn}(z)J_0(\alpha_m r)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5)$$

式(4)，(5)において，$J_i(\ )$はi次のベッセル関数，α_mは$J_0(\alpha b)=0$のm次の根である．

式(4)，(5)を式(1)に代入し，u^S, w^Sとu^d, w^dが満足する次式：

$$\left.\begin{aligned} &G\left[\triangle u^S+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e^S}{\partial r}-\frac{u^S}{r^2}\right]=0\\ &G\left[\triangle w^S+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e^S}{\partial z}\right]=0\end{aligned}\right\}\cdots(6)\qquad \left.\begin{aligned} &G\left[\triangle U^E{}_{mn}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e^E{}_{mn}}{\partial r}-\frac{U^E{}_{mn}}{r^2}\right]=-\rho p_{mn}{}^2U^E{}_{mn}\\ &G\left[\triangle W^E{}_{mn}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e^E{}_{mn}}{\partial z}\right]=-\rho p_{mn}{}^2W^E{}_{mn}\end{aligned}\right\}\cdots(7)$$

ただし，p_{mn}は固有円振動数，を考慮して式を変形し，その後固有関数の直交性を利用すれば未定時間関数$Q_{mn}(t)$に関する次の２階の微分方程式を得る（ $\ddot{\ }=d^2/dt^2$）．

Harutoshi KOBAYASHI, Keiichiro SONODA, ○Hajime YAMAMOTO, and Kenichi NAKAOKA

$$\ddot{Q}_{mn}(t)+p_{mn}{}^2Q_{mn}(t)=-F_{mn}(t)/N_{mn} \quad \cdots\cdots (8)$$

ここに,

$$F_{mn}(t)=\int\int[\ddot{U}^S(\mathbf{r},t)U^E{}_{mn}(\mathbf{r})+\ddot{W}^S(\mathbf{r},t)W^E{}_{mn}(\mathbf{r})]rdrdz \quad \cdots\cdots (9)$$

$$N_{mn}=\int\int\{[U^E{}_{mn}(\mathbf{r})]^2+[W^E{}_{mn}(\mathbf{r})]^2\}\,rdrdz \quad \cdots\cdots (10)$$

式(8)の解は周知のデュアメル積分で与えられ,荷重に対応する具体的な表示式が求められる.

【3】数値計算例

円盤上面にステップ状の分布荷重qH(t)が作用する場合につき計算を行った.用いた緒元は荷重幅/半径比a/b=0.4,円盤厚/直径比h/2b=0.3, ポアソン比 ν=0.3であり,時間については無次元時間τ [$=C_1t/h$, ここに$C_1=\sqrt{2G(1-\nu)/\rho(1-2\nu)}$は縦波の速度]を用いた. なお載荷前の円盤は静止しているものとした.

図2,3は,円盤中心軸上(r=0)各点での応力σ_r, σ_zの初期応答曲線を $\Delta\tau$=0.025に対して描いたものである.級数の収束状況や他の結果については講演時に発表する予定である.

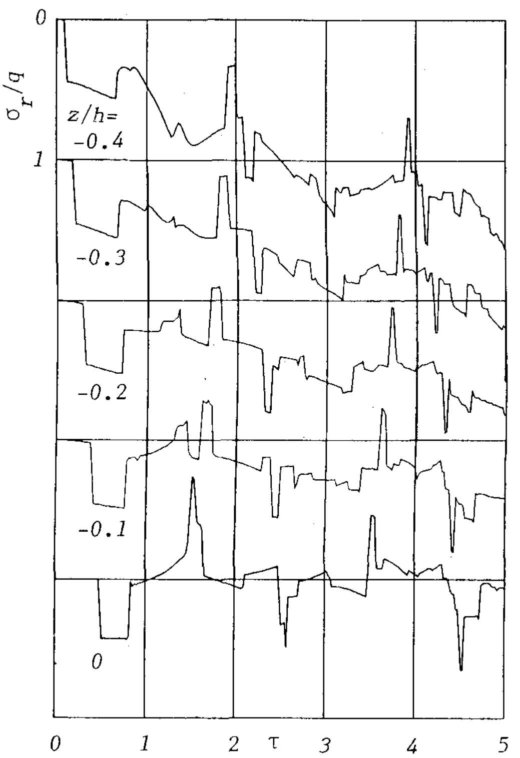

図2 中心軸上(r=0)のσ_rの応答曲線

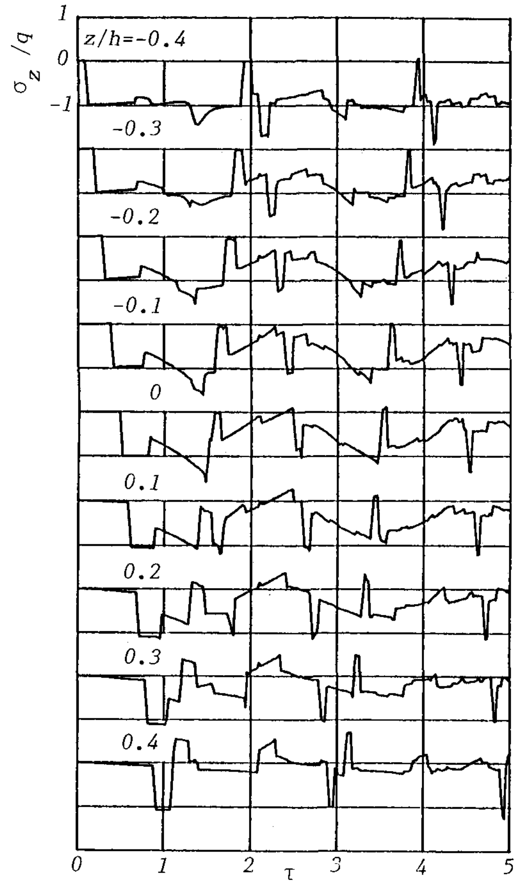

図3 中心軸上(r=0)のσ_zの応答曲線

【参考文献】

(1)小林他:衝撃荷重を受ける弾性厚円盤の解析,土木学会年次学術講演会(1989)I-328,(2)奥田他:衝撃荷重を受ける平面梁の応力波伝播解析, 土木学会年次学術講演会(1988)I-424, (3)Y.C.Lee & H.Reismann: Dynamics of Rectangular Plates, Int.J.Engng.Seience, **7**, (1969)