回転拘束を受ける変厚矩形板の固有値解析

大阪市立大学工学部　正員　○小林　治俊
大阪市立大学工学部　正員　　園田恵一郎

【１】まえがき

単純支持や固定条件は理想化されたものであり，境界では何等かの回転拘束を受ける．本文は，回転バネ支持された変厚矩形板の振動および座屈に及ぼすバネ効果および板厚変化の影響を検討したものである．変厚板の支配方程式は変数係数の微分方程式となり，一般に解析解を得ることは困難であるが，べき級数展開により高精度の解が得られることを示す．

【２】固有値解析

矩形板の境界条件は，y=0, bで単純支持(S.S.)，x=0, aで回転バネ支持(E.S.)とし(図1)，x=0, aでは一様な圧縮力N_xが作用し，板厚はx方向のみに直線変化するものとする．この時，たわみwに関する支配式は，

$$D\triangle\triangle w+2D'(\triangle w)'+D''[\nu\triangle w+(1-\nu)w'']+N_x w''-\rho h\omega^2 w=0 \quad \cdots\cdots (1)$$

ここに，ν=ポアソン比，ρ=密度，ω=固有円振動数，$'=d/dx$，$\triangle$=Laplacian.　板厚h，板剛度Dは，板厚関数$H(\xi)$，

$$H(\xi)=1+c\xi,\quad c=(h_a/h_0)-1,\quad \xi=x/a \quad \cdots\cdots (2)$$

を用いて次のように表せる．

$$h(x)=h_0H(\xi),\quad D(x)=D_0H^3(\xi) \quad \cdots\cdots (3)$$

y=0, b で単純支持を満たす解を式(4)と置き，式(1)に代入すればX(ξ)に関する微分方程式(5)を得る．

$$w=\sum_{m=1}^{\infty} X(\xi)\sin(m\pi y/b) \quad \cdots\cdots (4)$$

$$f_1X^{\cdot\cdot\cdot\cdot}+f_2X^{\cdot\cdot\cdot}+f_3X^{\cdot\cdot}+f_4X^{\cdot}+f_5X=0 \quad \cdots\cdots (5)$$

ここに，$f_1=H^3$, $f_2=6H^{\cdot}H$, $f_3=-2\alpha^2H^3+6H(H^{\cdot})^2+\gamma$,
$f_4=-6\alpha^2H^{\cdot}H^2$, $f_5=\alpha^4H^3-6\nu\alpha^2H(H^{\cdot})^2-\beta H$,
$\alpha=m\pi a/b$, $\beta=\omega^2a^4\rho h_0/D_0$, $\gamma=N_xa^2/D_0$, $\cdot=d/d\xi$.

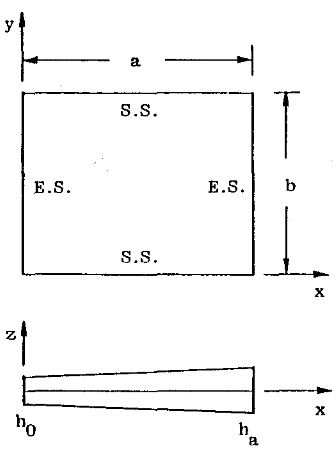

図1　座標系

微分方程式(5)は$0\leqq\xi\leqq1$で正則であるから，X(ξ)は収束半径$|\xi-\xi_0|<R$のべき級数，式(6)，に展開が可能であり，[1] 同時に変数係数f_iも式(7)の様に展開する．

$$X(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\xi-\xi_0)^{n-1} \quad \cdots\cdots (6) \qquad f_i=\sum_{n=1}^{N}F_n^{(i)}(\xi-\xi_0)^{n-1}\quad (i=1\text{-}5) \quad \cdots\cdots (7)$$

式(6)，(7)を式(5)に代入し，同じ次数のべきの係数を零に等値するとC_nに関する次の漸化式を得る．

$$Z_1C_{n-3}+Z_2C_{n-2}+Z_3C_{n-1}+Z_4C_n+Z_5C_{n+1}+Z_6C_{n+2}+Z_7C_{n+3}+Z_8C_{n+4}=0 \quad \cdots\cdots (8)$$

ただし，Z_iは n, $F_n^{(i)}$等よりなる定数，$C_i=0\,(i\leqq0)$．これよりC_1-C_4を独立変数として$C_n\,(n\geqq5)$が決定され，対応する解を$X_i(\xi)$とすれば，(5)式の解は

$$X(\xi)=C_1X_1(\xi)+C_2X_2(\xi)+C_3X_3(\xi)+C_4X_4(\xi) \quad \cdots\cdots (9)$$

x=0, aでの境界条件は，回転バネ係数をϕ_0, ϕ_aとすれば，

$$w=0,\ M_x=-\phi_0\partial w/a\partial\xi\ (\xi=0),\qquad w=0,\ M_x=\phi_a\partial w/a\partial\xi\ (\xi=1) \quad \cdots\cdots (10)$$

○Harutoshi KOBAYASHI and Keiichiro SONODA

式(4)を境界条件式(10)に代入し得られた同次連立方程式の係数行列式より，振動数方程式あるいは座屈方程式が決定する．

【3】数値計算結果

振動数パラメターを$\lambda=\omega b^2\sqrt{\rho h_0/D_0}$，座屈係数を$k=N_x b^2/\pi^2 D_0$とし，無次元回転バネ係数 $R=\phi_0 b/D_0=\phi_a b/D_0$をパラメターとして数値計算を行った．ポアソン比は$\nu=0.3$とした．

べき級数解は展開中心ξ_0 の選択が収束性と精度を左右する．通常用いられている原点まわりのべき展開は，辺長比(a/b)あるいは板厚比(h_a/h_0)が大きくなれば，収束が極端に遅くなり場合によっては収束解が得られないが，$\xi_0=1/2$ と採れば，いずれの辺長比，板厚比に対しても高精度の安定解が得られることを先に示した．[2-4]　以下では$\xi_0=1/2$ を用いて計算した．

図2は，回転バネ係数の変化に対する基本振動数パラメター(λ_{00})を，辺長比 a/b=0.5, 1.0, 1.5，板厚比h_a/h_0=1.0, 1.5, 2.0 の組合せに対して描いたものである．辺長比が小さくなるほど，また板厚比が大きくなるほど，振動数は大きくなり，R=1～100の範囲においてその変化の度合が大きいようである．図3は，同じパラメターに対する座屈係数(k)を示している．座屈係数についても振動の場合と同じことが言える．

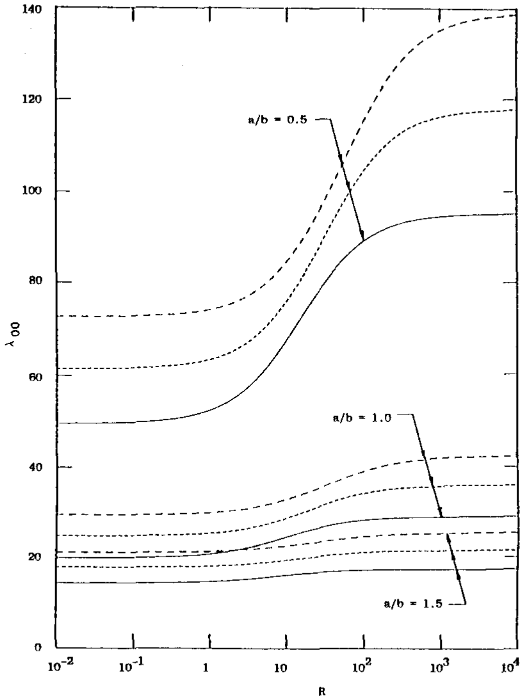

図2　振動数パラメター(λ_{00})

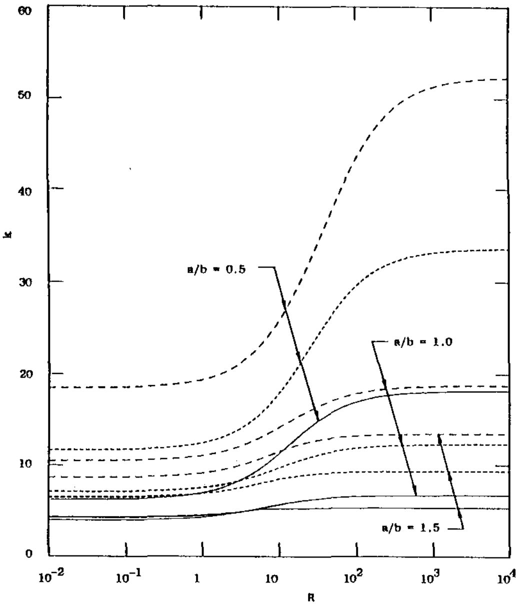

図3　座屈係数(k)

【参考文献】

(1)寺沢寛一：自然科学者のための数学概論，岩波書店，(2) H.Kobayashi & K.Sonoda: Natural frequencies of rectangular plates with tapered thickness, Memo.Fac.Eng. Osaka City Univ. **30**, 123-144 (1989) (3) H.Kobayashi & K.Sonoda: Buckling of rectangular plates with tapered thickness, J. Struct.Engng.,ASCE(May 1990)(4)H.Kobayashi & K.Sonoda: Vibration and buckling of tapered rectangular plates with edges elastically restrained against rotation, J. Sound Vib.(submitted)