

確率有限要素法の構造非線形問題への適用

大阪大学工学部 正 員 西村宣男

大阪大学工学部 学生員〇西井 学

大阪大学工学部 正 員 亀井義典

1. まえがき これまで構造系の材料定数や初期形状が不確定性を有する問題、例えば残留応力や初期変位が確率量で与えられ、構造系の強度が確率量として評価されるべき問題では、モンテカルロシミュレーションにより強度分布を再現するより手だてがなかった。しかし構造系の剛性行列の因子である材料定数や節点座標に不確定性を有する問題では、分布の特性値を摂動パラメータとする摂動法を用い、確定外力に対する確率量として応答値を評価する方法である確率有限要素法 (S.F.E.M.: Stochastic Finite Element Method) の考え方がある。ここでは本手法を非線形問題へ拡張するためのアルゴリズムの開発を行った。

2. 確率構造系への適用 剛性マトリックスの変動は、

期待値0の微少な確率変数を用いて式(1)で表せる。

$$K = K^0 + \sum_{k=1}^n K_k^1 \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n K_{kl}^2 \alpha_k \alpha_l + \dots \quad (1)$$

K_k^1 は α_k の変動に対し線形に作用する1次摂動項であり、 K^0 を α_k で微分して求められる。 K_{kl}^2 は K^0

$$U = U^0 + \sum_{k=1}^n U_k^1 \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n U_{kl}^2 \alpha_k \alpha_l + \dots \quad (2)$$

を α_k, α_l で微分した2次の摂動項である。また、荷重ベクトル F についても同様な展開が既知であるとする。

$$U^0 = (K^0)^{-1} F^0 \quad (3a)$$

次に応答(変位)ベクトル U を、確率変数 α_k により式(2)のように仮定する。式(1)、(2)を剛性方程式 $F = KU$ に代入し、 α_k に関して各次で等置すれば、

$$U_k^1 = (K^0)^{-1} (F_k^1 - K_k^1 U^0) \quad (3b)$$

確定項 U^0 、1次変動率 U_k^1 、2次変動率 U_{kl}^2 ... が

$$U_{kl}^2 = (K^0)^{-1} (F_{kl}^2 - K_k^1 U_l^1 - K_l^1 U_k^1) \quad (3c)$$

式(3)の様に求められる。マトリックスの演算であるが逆行列は K^0 についてのみ求めればよい。1次近似

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$E(U) = U^0 \quad (4)$$

式(3)の様に求められる。マトリックスの演算であるが逆行列は K^0 についてのみ求めればよい。1次近似

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

法では式(2)の平均と分散は式(4)、(5)のようになる。

$$\dots \dots \dots$$

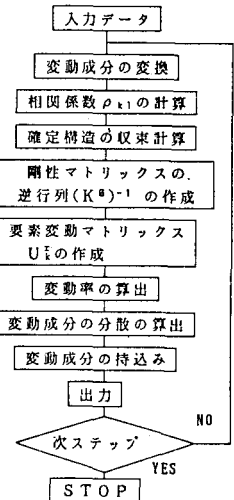


図-1 アルゴリズム

Nobuo NISHIMURA, Manabu NISHII and Yoshinori KAMEI

値として極限強度の変動を得るため変位制御による非線形計算法を用い、図-2の様に変位ステップ区間を線形化した。まずN 変位ステップ dU_r を与えて収束計算後、前平衡状態からの増分変位 U^0 と増分荷重 F^0 が算出される。次に K^0 は図-2の剛性マトリックス K_1^0, K_2^0 を用いて式(6)で与える。また K_k^0 についても同様に K_{k1}^0, K_{k2}^0 を用いて与える。ここで制御ベクトル f における変位 U_r の変動は生じない条件を式(3)に代入し、荷重変動 F_r が明らかになる。 F_r の平均値と分散は式(7)で得られる。

$$K^0 = \frac{1}{2} \kappa (K_1^0 + K_2^0), \quad \kappa = \frac{F^0}{\{1/2(K_1^0 + K_2^0) \cdot U^0\}_r} \quad (6)$$

$$K_1^0, K_2^0: N \text{ 変位STEP前, 後の平衡状態の剛性マトリックス}$$

$$E(F_r) = F^0, \quad \text{Var}(F_r) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n F_{kr}^T F_{lr} \rho_{kl} \text{Var}(\alpha_k) \text{Var}(\alpha_l) \quad (7)$$

4. ミーゼストラスへの適用 図-3に示す様に部材①と②のヤング率 E_1, E_2 が確率変数となっているトラス構造(ミーゼストラス)のモデルを考える。載荷点Cの変位 V と荷重 P の関係は次式で表される。

$$P = \frac{EA}{L_0^3} V(V-h)(V-2h) \quad (8)$$

荷重-変位曲線を図-4に示す。 E_1 と E_2 は正規分布とし、その変動特性を以下のように与え、平均値 EM と下限値 ES は次の値となる。

$$E(\alpha_k) = 1.0, \quad \text{Var}(\alpha_k) = 0.05, \quad \alpha_k = E/E_a, \quad E_a = 2.1 \times 10^6 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

$$EM(M) = 2.1 \times 10^6 \text{ (kg/cm}^2\text{)} \quad ES(M-2S) = 1.89 \times 10^6 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

節点CのY方向変位を制御ベクトルとしてS.F.E.M.を適用し、各変位ステップにおける荷重変動の平均値 PM と下限値 PS を、1次摂動法で求めた。 E_1 と E_2 が従属な場合: 式(8)より各変位ステップにおいて、 P と E は線形関係にある。従って P は E の分布形に相似な正規分布となり、荷重 P の平均値 PM と下限値 PS は同じ変位ステップにおいて共にピーク値をとる。更に E_1 と E_2 が従属であるから、 E_1 と E_2 が共に平均値 EM 、共に下限値 ES の時にそれぞれ PM と PS を与える。

表-1より各変位ステップでS.F.E.M.はモデルの変動を適切に評価しており、ピーク荷重(A点)通過後において、変動が減少に転じる部分についても良好に対応している。

E_1 と E_2 が独立な場合: PS を与える E_1 と E_2 の組合せは多数存在する。正規分布表を用いて E_1 と E_2 が等しくなる組合せを求めれば、 $M-2S$ 相当(ESS)どうしとなる。

$$ESS(M-2S) = 1.9515 \times 10^6 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

表-2より従属な場合と同様に、独立な場合についてもS.F.E.M.の評価は PM, PS と一致している。また E_1 と E_2 が従属な場合に比べ、分散は幾分小さくなっている。このように入力値、応答値共に正規確率変数となる問題では、確実にその変動を追跡可能である。

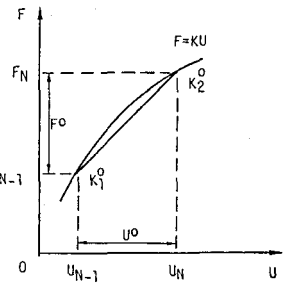


図-2 区間線形化

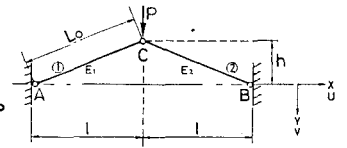


図-3 ミーゼストラス

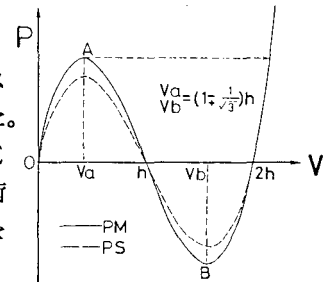


図-4 荷重-変位曲線

表-1 解析結果

(a) E_1 と E_2 が従属な場合					(b) E_1 と E_2 が独立な場合				
STEP(m)		S.F.E.M.(t)	式(8)		STEP(m)		S.F.E.M.(t)	式(8)	
0.01 (0.01)	PM	0.0967544	0.0967955		0.01 (0.01)	PM	0.0967544	0.0967955	
	S	0.0048377				S	0.0034208		
	PS	0.0870789	0.0871159			PS	0.0893128	0.0899510	
0.01 (0.02)	PM	0.1290101	0.1290153		0.01 (0.02)	PM	0.1290101	0.1290153	
	S	0.0064505				S	0.0045612		
	PS	0.1161090	0.1161137			PS	0.1198877	0.1198925	
0.001 (0.021) peak	PM	0.1293104	0.1293252		0.001 (0.021) peak	PM	0.1293104	0.1293252	
	S	0.0064655				S	0.0045718		
	PS	0.1163793	0.1163927			PS	0.1201688	0.1201806	
0.001 (0.022)	PM	0.1291414	0.1291571		0.001 (0.022)	PM	0.1291414	0.1291571	
	S	0.0064571				S	0.0045658		
	PS	0.1162272	0.1162414			PS	0.1200097	0.1200243	
0.001 (0.023)	PM	0.1285208	0.1285373		0.001 (0.023)	PM	0.1285208	0.1285373	
	S	0.0064260				S	0.0045439		
	PS	0.1156887	0.1156836			PS	0.1194330	0.1194484	
(TOTAL) S: 標準偏差					(TOTAL) S: 標準偏差				