空間相互作用を考慮した地域モデルの推定方法

京都大学工学部　正　員　吉川和広　　京都大学工学部　正　員　奥村　誠
京都大学大学院　学生員　足立康史　　京都大学工学部　学生員○林　謙一

1．はじめに

これまで、数多くの地域モデルが開発され、実用に供されてきた。これらのモデルに含まれるパラメータの値を観測データに基づいて推定する際には、通常最小二乗（ＯＬＳ）法が多く用いられている。しかしながら地域モデルが対象とする地域現象の形成過程は、空間的な次元を含んでおり、攪乱項の分布の正規性や独立性の仮定が満たされないことがほとんどである。その結果ＯＬＳ推定量が効率性などの望ましい性質を持たないことが多い。本稿では、空間的な次元の取り入れ方により線形の地域モデルを分類するとともに、それぞれのモデルの推定法を明らかにする。

2．地域モデルの分類

一般に地域現象は自ゾーンに固有の要因（内在的諸特性）と、他ゾーンからの影響要因（空間的相互作用）から説明できると考えられる。そこで地域モデルをこれら２つの要因の考慮の方法により分類し、その推定上の問題点を指摘することとする。
以下、Ｘは外生変数行列$(n\times k)$，ｙは内生変数ベクトル$(n\times 1)$，βはパラメータベクトル$(k\times 1)$，ρは空間相関係数，εは攪乱項ベクトル$(n\times 1)$を表わす。また添字のｉは着目しているゾーン、ｊはそのゾーンに影響を持つ他のゾーンを表わす。

(1) 自ゾーンの要因（内在的諸特性）のみを考慮したモデル

$$y_i = X_i \beta + \varepsilon_i \qquad (i=1,,,n) \quad (1)$$

自ゾーンにおける他の活動の水準が影響を及ぼす場合には、以下のような連立方程式となる。

$$y_{1i} = y_{2i}\gamma_1 + X_i \beta_1 + \varepsilon_{1i}$$
$$y_{2i} = y_{1i}\gamma_2 + X_i \beta_2 + \varepsilon_{2i} \qquad (i=1,,,n) \quad (1')$$

このモデルは、他ゾーンの影響を考慮していないので、計量経済学で用いられる推定法がそのまま使用できる。通常最小二乗法（ＯＬＳ）が多く用いられているが、連立型の場合や、ゾーンの規模が異なるような場合には、不等分散性を考慮できる一般化最小二乗法（ＧＬＳ）等が必要である。

(2) 空間相互作用を目的変数の自己相関項によって表現したモデル（一次空間自己回帰モデル）

空間相互作用は他ゾーンの変数との機能的な関係によって生じるものであるが、その関係を明示的に取り扱う代わりに事後的に自己相関項により表現すれば、以下のようなモデルとなる。

$$y_i = \rho \Sigma f_{ij} y_j + X_i \beta + \varepsilon_i \qquad (i=1,,,n) \quad (2)$$

このモデルは、他のゾーンの内生変数が右辺に含まれているため、通常最小二乗法（ＯＬＳ）では有効な推定量が得られず、特別な工夫が必要である。CliffとOrdによって最尤推定法と反復一般化最小二乗法が開発されている。

(3) ゾーン間の機能的な関係を外生変数を用いて明示的に表現したモデル

空間相互作用をもたらす他のゾーンの変数が外生変数として表現できれば、以下のような形になる。

$$y_i = X_i \beta_1 + \Sigma f_{ij} X_j \beta_2 + \varepsilon_i \qquad (i=1,,,n) \quad (3)$$

Empirical Typeの土地利用モデルの多くは、この形式である。右辺第２項の変数は外生変数であり、これを「そのゾーンに固有のアクセシビリティ指標」として扱うことにより(1)のモデルに還元できる。従って(1)と同様の推定手法を用いることができる。

(4) 内生変数相互の機能的な関係を明示的に表現したモデル（連立型地域モデル）

例えば、小売販売額と人口が内生変数である場合には　各ゾーンの小売販売額は自ゾーンばかりでなく隣接するゾーンの人口にも影響を受ける。つまり他のゾーンの別の内生変数が相互作用の原因となっており、その関係は以下のような連立方程式の形で表現できる。

$$y_{1i} = \rho_1 \Sigma f_{ij} y_{2j} + X_i \beta_1 + \varepsilon_{1i} \qquad (i=1,,,n)$$
$$y_{2i} = \rho_2 \Sigma g_{ij} y_{1j} + X_i \beta_2 + \varepsilon_{2i} \qquad (4)$$

ローリーモデルを基礎とするモデルをはじめ、多くの土地利用モデルはこの形式である。これまでは推定法にはあまり注意が払われず、y_{1j}、y_{2j}を外

Kazuhiro YOSHIKAWA, Makoto OKUMURA, Yasushi ADACHI, Ken-ichi HAYASHI

生変数のように扱って、(3)と同様にＯＬＳ推定されることが多かった。しかし他ゾーンの内生変数が右辺に含まれているため、ＯＬＳでは有効な推定量が得られず、特別な工夫が必要である。本研究ではこのモデル構造に対応した推定方法を開発する。

3．連立型地域モデルの反復一般化最小二乗法

（ＩＧＬＳ:Iterated Genaralized Least Square)

連立型地域モデルの推定法を考える際には、右辺に内生変数を含んでいるという点で (2)一次空間自己回帰モデルの推定手法が参考になる。ゾーン数が限られている地域モデルにおいては、観測データの個数も多くとれないため小標本特性が問題になることが多い。そこでここでは、漸近性に基礎をおき大標本特性が優れている最尤推定法ではなく、Cliff &Ord(1981) による反復一般化最小二乗法をもとにして連立型への拡張を考えることとする。

式(4)を行列表示すると、次式のようになる。

$$y_1=\rho_1 F y_2+X_1\beta_1+\varepsilon_1$$
$$y_2=\rho_2 G y_1+X_2\beta_2+\varepsilon_2 \tag{5}$$

さらにこの２式をまとめると、次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \rho_1 F \\ \rho_2 G & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

これを変形すると、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

となる。

よってベクトル $(y_1 \ \ y_2)^T$ の共分散は、

$$E\begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1\,T}$$
$$=\begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \sigma_1^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1\,T}$$
$$=\sigma_1^2\ \Omega \tag{7}$$

となる。ただし、

$$\Omega=\begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \xi I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\rho_1 F \\ -\rho_2 G & I \end{pmatrix}^{-1\,T} \tag{8}$$
$$\xi=\sigma_2^2/\sigma_1^2 \tag{9}$$

である。

よって、未知パラメータ $\rho_1, \rho_2, \beta_1, \beta_2$ の値を求めるためには、行列Ωの逆行列 Ω^{-1} を重みとしてＧＬＳ推定すればよい。つまり、

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix} F y_2^T & 0 \\ 0 & G y_1^T \\ X_1^T & 0 \\ 0 & X_2^T \end{pmatrix}\Omega^{-1}\begin{pmatrix} F y_2 & 0 & X_1 & 0 \\ 0 & G y_1 & 0 & X_2 \end{pmatrix}\right)^{-1}$$
$$\times\begin{pmatrix} F y_2^T & 0 \\ 0 & G y_1^T \\ X_1^T & 0 \\ 0 & X_2^T \end{pmatrix}\Omega^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

により求められる。ただし、

$$\Omega^{-1}=\begin{pmatrix} I+\rho_2^2\xi G^T G & -\rho_1 F-\rho_2\xi G^T \\ -\rho_1 F^T+\rho_2 G & \rho_1^2 F^T F+\xi I \end{pmatrix} \tag{11}$$

である。

ここで、重み行列 Ω^{-1} に未知パラメータ ρ_1, ρ_2, ξ が含まれているため、繰返し手順が必要となる。

すなわち、

① 先験的情報を用いてパラメータ ρ_1, ρ_2, ξ の初期値を与えて（情報がないときは $\rho_1, \rho_2=0, \xi=1$ と置く）重み行列 Ω^{-1} を計算する(式11)。

② ①で求めた重み行列 Ω^{-1} を用いてＧＬＳ推定を行い、推定値 $\beta_1, \beta_2, \rho_1, \rho_2$ を求める(式10)。また残差の分散の比を ξ とする。

③ ②で求めた推定値 ρ_1, ρ_2, ξ を用い、重み行列 Ω^{-1} を計算し直す(式11)。

④ ③で求めた Ω^{-1} を用いて新たに推定値 $\beta_1, \beta_2, \rho_1, \rho_2$ をＧＬＳ推定により求める(式10)。ξ は②と同様に残差の分散の比を用いて更新する。

⑤ 全ての推定値が収束しているか調べる。 収束していない場合は③に戻り、③～⑤を繰返す。

4．おわりに

本推定法の特性を調べるためモンテカルロ・シミュレーションを実施し、ＯＬＳ推定量との比較を行なった。その結果、推定量の不偏性には差はないがＩＧＬＳは効率性が優れていることがわかった。特に、β_1 と β_2 の大きさに差がある場合、ρ_1 と ρ_2 の積が１に近いような場合、ρ_1 が１に近く β_1 が０に近いような場合には、ＯＬＳでは β の分散が大きくなるが、ＩＧＬＳでは小さく押えることができる。

参 考 文 献

1)Anselin :Spatial Econometrics,Pion,1988

2)Cliff & Ord :Spatial Processes,Pion,1981

3)Ord:Estimation Methods for Models of Spatial Interaction. J.of Ame.Statist.Assoc.,1975