移動床上の振動流境界層の解析

京都大学工学部　正員　浅野敏之

1．はじめに　高波浪時の浅海域においては、掃流力がきわめて大きいために砂漣が消滅し、平坦床状態が形成されるが、こうした場合の底面付近の流体場の特性については、ほとんど明らかにされていない。最近、Bakker-van Kesteren(1986)やAhilan-Sleath(1987)が底質を含む振動流流れの簡単なモデルを提案しているが、そこでは流体の水粒子速度と底質の移動速度を区別した議論がなされていない。著者(1988ａ､b)は昨年、移動床上の振動流流れの抵抗則の解明を目的として、流体粘性、底質浮遊による密度成層および底質粒子間の干渉力によるエネルギー逸散を見積り、その結果はCarstensら(1969)の実験結果とかなりよく一致することが分かったが、より精密な評価を行うためには、底質を含む振動流流れの解析を行う必要がある。

本研究では、まず底質と流体のそれぞれに対して、質量及び運動量の保存則を導き、さらにorderingによって簡略化された基礎式を導出して、それに対する数値解析を計算を行ったものである。

2．固液混相流れの基礎式の誘導　以下のような条件を想定し理論の展開を行う。(a)２次元振動流流れ (b)底面は平坦 (c)底質は一様粒径で非粘着性 (d)流れは乱流状態、分子粘性・分子拡散性は無視できる。一方向流に対する数学的定式化はBogardi(1974)、あるいはKobayasi-Seo(1985)が行っており、流れの非定常性に起因する項を付加することにより、以下の式が得られる。まず、流体と底質に対する質量保存則から、それぞれ(1)､(2)が得られる。

$$\partial\rho(1-c)/\partial t+\partial\rho(1-c)u_j/\partial x_j=0 \quad (1) \qquad \partial\rho_s c/\partial t+\partial(\rho_s c u_{sj})/\partial x_j=0 \quad (2)$$

ここに、ρ、ρs：流体、底質の密度、ｕｉ：ｘｉ方向の水粒子速度(i=1,2)、ｕs,ｉ：ｘｉ方向の底質粒子移動速度、ｃ：濃度である。　流体相および底質相に対する運動量保存則は以下のとおりである。

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(1-c)u_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho(1-c)u_iu_j=-(1-c)\frac{\partial p}{\partial x_i}-\rho(1-c)g\delta_{i2}-f_i \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_s c u_{s,i}+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho_s c u_{si}u_{sj}=-c\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial \gamma_{ji}}{\partial x_j}-\rho_s c g\delta_{i2}+f_i \qquad (4)$$

ここに、ｐ：圧力、ｇｉ：重力加速度、ｆｉ：底質粒子と流体間に生じる単位体積当りの干渉力、γji：底質粒子間に作用する干渉応力テンソルである。　乱れの時間スケールが波の時間スケールより十分小さいと仮定し、変数を（定常成分＋波動成分）と乱れ成分に分離する。また振動流であるから流れ方向の移流慣性項を無視する。さらに次の仮定を導入し、(1)~(4)の簡略化を行う。ｉ）　ｕ>>ｗ，ｕs>>ｗs、$u\overline{c'w'}$>>$\overline{c'u'w'}$等のオーダー比較より、乱れの相関項を簡略化する。ｉｉ）　渦拡散係数Ｋc、渦動粘性係数Ｋvを用いて、乱れの相関項を平均速度で表現する。すなわち、

$$\overline{c'w'}=\overline{c'w_s'}=-K_c\,\partial c/\partial z \qquad \overline{u_s'w_s'}\simeq\overline{u'w'}=-K_v\,\partial u/\partial z \qquad (5)$$

ｉｉｉ）　粒子間応力項に対し、次式を仮定する。$\partial\gamma_{xx}/\partial x \ll \partial\gamma_{xz}/\partial z$, $\partial\gamma_{xz}/\partial x \ll \partial\gamma_{zz}/\partial z$　(6)

γxzについてはSavage-McKeown(1983)の実験式である次式を用いた。

$$\gamma_{xz}/\rho=1.2\lambda^2\nu\,\partial u_s/\partial z \qquad (7)$$

ここに、λは線形濃度である。　iv）　局所慣性項中の乱れ相関項を無視する。　v）fx、fzに関しては、底質粒子が完全な球形であること、近接粒子の相互干渉力が無視できることを仮定し、さらに通常の条件下では底質粒子に作用する慣性力は抗力に比して十分に小さいことを勘案して、次式で与えることにする。

$$f_i=(\rho/2)C_D(\pi d^2/4)(c/(\pi d^3/6))u_{i,r}|u_{i,r}| \qquad (8)$$

Toshiyuki ASANO

ここに、ur,i=ui－us,i　(i=1､2)は流体と底質粒子の相対速度である。抗力係数CDの設定にはRubeyの公式を用いた。

<u>3．境界層近似</u>　u，us、w，ws、c，pの6個の未知変数に対して、(1)－(4)のように6つの方程式が得られるわけであるが、これらの式はきわめて非線形性が強く、数値的にも解くことが困難である。そこで以下のような境界層近似を行い、さらなる簡略化を行う。

$$u=\bar{u}u_0,\ u_s=\bar{u}_s u_0,\ u_r=\bar{u}_r u_0,\ w=w_{f0}\bar{w}/\sqrt{R},\ w_s=w_{f0}\bar{w}_s/\sqrt{R},$$
$$x=\xi/k,\ z=\sqrt{\nu/\omega}\,\zeta,\ t=\tau/\omega,\ c=\bar{c},\ 1-c=c^*,\ p=\rho(\omega/k)u_0\bar{p}, \tag{9}$$
$$K_c=\sqrt{\nu/\omega}\,u_0\bar{K}_c,\ K_v=\sqrt{\nu/\omega}\,u_0\bar{K}_v,\ \sqrt{R}=u_0/\sqrt{\nu\omega}$$

ここに、u0：底面における最大水粒子速度、wf0：静水中における単一底質粒子の終末沈降速度、ν：水の動粘性係数、k：振動流の波数、ω：振動流の角周波数である。

まず底質相に対する質量保存則として
$$\frac{\partial\bar{c}}{\partial\tau}=-\left(\frac{w_{f0}}{u_0}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}(\bar{c}\bar{w}_s)+\sqrt{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\bar{K}_c\frac{\partial\bar{c}}{\partial\zeta}\right\} \tag{10}$$
流体相に対するx方向運動方程式として
$$\frac{\partial}{\partial\tau}\{c^*\bar{u}\}+\left(\frac{w_{f0}}{u_0}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\{c^*\bar{u}\bar{w}\}$$
$$=\sqrt{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\bar{K}_v c^*\frac{\partial\bar{u}}{\partial\zeta}-\bar{K}_c\bar{u}\frac{\partial\bar{c}}{\partial\zeta}\right\}-c^*\frac{\partial\bar{p}}{\partial\xi}-\left(\frac{u_0}{\omega d}\right)\frac{4}{3}C_D\bar{c}|\bar{u}_r|\bar{u}_r \tag{11}$$
底質層に対するx方向運動方程式として
$$\frac{\partial}{\partial\tau}\{\bar{c}\bar{u}_s\}+\left(\frac{w_{f0}}{u_0}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\{\bar{c}\bar{u}_s\bar{w}_s\}=\sqrt{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\bar{K}_v\bar{c}\frac{\partial\bar{u}_s}{\partial\zeta}+\bar{K}_c\bar{u}_s\frac{\partial\bar{c}}{\partial\zeta}\right\}$$
$$-\frac{1}{s}\bar{c}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\xi}+\frac{1.2}{s}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\lambda^2\frac{\partial\bar{u}_s}{\partial\zeta}\right)+\frac{1}{s}\left(\frac{u_0}{\omega d}\right)\frac{4}{3}C_D\bar{c}|\bar{u}_r|\bar{u}_r \tag{12}$$
が得られる。ここで、s＝ρs/ρは底質の比重である。これ以外の3方程式からは、圧力pに関する記述式などが得られるが、紙面の制約上省略する。上記の3方程式の未知変数は　u，us、cの3個のみとなり、解くことが可能である。関与するパラメターは以下の3つである。
$$u_0/gd,\quad R=u_0^2/\omega\nu,\quad u_0/\omega d \tag{13}$$
Kc、Kvの設定はKc＝Kvとし、底質浮遊が乱れの質量・運動量輸送効果に及ぼす抑止効果を考慮した次式を仮定する(Glenn-Grant：1987)。
$$K_c\cdot K_v=\kappa u_*(t)z/(1+4.7(z/L)),\quad L=\hat{u}_*^3/(\kappa g(s-1)w_{f0}\bar{c}) \tag{14}$$
ここに、κはカルマン定数，u＊(t)は摩擦速度である。

濃度cに対する境界条件は
$$\bar{c}=C_{max}\simeq 0.65\ \ \text{at}\ \ \zeta=0,\quad \bar{c}w_{f0}-\bar{K}_c\frac{\partial\bar{c}}{\partial\zeta}=0\ \ \text{at}\ \ \zeta=\bar{\delta}_w \tag{15}$$
とする。上記の境界条件からわかるように、本解析は振動流においては特に根拠の希薄な基準面濃度の変動を持ち込まないでよい点が特徴である。ここでは、濃度変動の非定常性は拡散係数の周期変動性に起因して現れる。すなわち、(14)の$\bar{K}$cはu＊(t)に比例するが、
$$u_*(t)=|\tau_b/\rho|=|\cos(\omega t+\varphi_1)|=\Gamma(3/4)/(\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(5/4))\cdot[1+(2/5)\cos 2\theta-(2/15)\cos 4\theta+\cdots]$$
であるから（Γはガンマ関数、ψ1はτbとUとの位相差）、Kcは　(16)
$$\bar{K}_c=K_{c0}(1+0.4\cos 2\theta)=K_{c0}+K_{c2}\cos 2\theta \tag{17}$$
の時間変化を有する。そこで$\bar{C}$＝C0＋C2 cos 2θと表わし、(17)を(10)に代入して次のような定常解を得る。
$$-\left(\frac{w_{f0}}{u_0}\right)\bar{w}_s C_0+\sqrt{R}K_{c0}(\partial C_0/\partial\zeta)=0 \tag{18}$$
また非定常解は次式のようになる。
$$\frac{\partial C_2}{\partial\tau}=-\left(\frac{w_{f0}}{u_0}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}(\bar{w}_s C_2)+\sqrt{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{K_{c0}\frac{\partial C_2}{\partial\zeta}+K_{c2}\frac{\partial C_0}{\partial\zeta}\right\} \tag{19}$$
数値計算に当たっては、まず濃度cの時空間変化を求めてしまい、そのcの値を用いて　u，usを計算するという2段階のステップを取ることにした。Crank-Nicolson法を用い、従来の領域区分でsheet flow状態となる条件下で計算を行った。紙面の制約上、計算結果は講演会会場で示すことにする。