緩勾配方程式の誤差評価について

大阪工業大学　後野正雄
大阪大学　椹木　亨

まえがき：緩勾配方程式による波変形の計算が近年よく行なわれているが、この緩勾配方程式の誘導についてはいくつかの問題点が残されている。本研究は緩勾配方程式がどのような近似あるいは誤差を持っているのかについて検討を行なったものである。まずエネルギーの保存則を厳密に満たす方程式を誘導し、この方程式を基礎方程式とし、どのような近似によって緩勾配方程式が導かれるのかを明らかにすることによって、緩勾配方程式が内包する誤差を示すことにする。

エネルギー保存則：非圧縮性流体を仮定しエネルギーの保存則を求めると任意の領域Dについて

$$\int\int_{\Gamma} VnE'd\Gamma + \frac{d}{dt}\int\int\int_{D} EdD = 0 \tag{1}$$

が成り立つ。ここでΓは領域Dの表面、ＶｎはΓの法線方向速度、Ｅは単位質量当りのエネルギー、Ｅ’はＥに内部エネルギーを加えたものである。ここで領域Dとして水面($z=\eta$)と水底($z=-h$)を表面にもつ領域を考え、速度ポテンシャルΦの存在を仮定する。Gaussの公式、Leibnizの定理、および、Eulerの運動方程式を用いると式(1)は次のように変形できる.

$$\int\int dxdy\int_{-h}^{\eta} -\frac{\partial\Phi}{\partial t}\left(\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)dz = 0 \qquad \text{ただし} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{2}$$

また、水底と水面の運動学的境界条件は次のようである.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \nabla\Phi\cdot\nabla h = 0 \quad \text{at } z=-h \qquad\qquad \frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla\Phi\cdot\nabla\eta - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z=\eta$$

ここで $\Phi = \phi(x,y,t)f(z,h)$ を仮定し，上の式とグリーンの公式等を用いると，式（２）は以下のように変形できる。

$$\nabla\cdot\int_{-h}^{\eta} f^2\nabla\phi dz - \phi\int_{-h}^{\eta}(\partial f/\partial z)^2 dz + f\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big|_{z=\eta} + \phi\nabla\cdot\int_{-h}^{\eta} f\nabla f\,dz - \phi\int_{-h}^{\eta}(\nabla f)^2 dz = 0 \tag{3}$$

この式は $\Phi = \phi f$ の仮定のもとでエネルギー保存を厳密に表す式である。

緩勾配方程式の誘導：まず以下に示すような無次元化を行う。

$(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) = (k_0 x,\ k_0 y,\ k_0 z)$ 　:　 $t = \omega t$ 　:　 $h = k_0 h$

$g = k_0 g/\omega^2$ 　:　 $\phi = \omega\phi/a_0 g$

$C = C/C_0$ 　:　 $\mu = k/k_0$ 　:　 $\nabla = \nabla/k_0$ 　:　 $\eta = \eta/a_0$

ここで $\omega^2 = gk\cdot\tanh kh$ ，$C_0 = \omega/k_0$ であり，さらに a; 波の振幅，ω; 波の角周波数，k; 波数であり，また添字0 は沖波の諸量であることを示す。（以下の文章では簡単のため上付きハット＾を省略し、断わりのないかぎりすべての記号を無次元量とする。）沖波の波形勾配を $\varepsilon(=k_0 a_0 \ll 1)$ とすると鉛直方向の積分領域は $[-h,\varepsilon\eta]$ となるので，これを $[-h,0]$ と $[0,\varepsilon\eta]$ に分割し，さらに $[0,\varepsilon\eta]$ の部分にTaylor 展開を用い，ε の２次以上の項を無視し、$f = \cosh\cdot\mu(h+z)/\cosh\cdot\mu h$ を仮定すると次の式が得られる。

Masao NOCHINO , Toru SAWARAGI

$$\nabla\cdot(CCg\nabla\phi) - (1-n)\phi + \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{1}{2}\phi\nabla(C^2\nabla n) - \frac{\phi}{2C^2}(\nabla C^2)^2\square + 2\varepsilon\nabla\cdot(\eta\nabla\phi) - \varepsilon\eta\phi + \varepsilon\eta\frac{\partial\eta}{\partial t} = 0$$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ (4)

ここで $\square = 2-n - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3}\{(5-2n-4n^2)h - 2(1+n)h^2\}$

$$n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\mu h}{\sinh\cdot 2\mu h}\right), \quad Cg = Cn$$

一方、水面の力学的境界条件についても同様な無次元化とz=0に関するTaylor展開および $\Phi = \phi f$ の仮定を用いると次式が得られる.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \eta + \varepsilon\eta\frac{\partial\phi}{\partial t} + \varepsilon(\nabla\phi)^2 = 0 \qquad (5)$$

⑨ ⑩ ⑪ ⑫

ここで式(4)の①、②、③項、式(5)の⑨、⑩項のみを採用し，これらの式から ηを消去すると次式で示される非定常の緩勾配方程式が得られる.

$$\nabla\cdot(CCg\nabla\phi) - (1-n)\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (6)$$

<u>オーダーの比較</u>：ここで式(4)と(5)の各項のオーダーの比較を行なう. ϕ は常に 1 のオーダーであり、η は a/a_0 のオーダーである.又時間に関する微分はオーダーの変化はないが、空間微分 ∇ を施すときには μ の次数が1つあがる.すなはち，$\nabla\phi$ はO(μ)となる。$h \to 0$ のときに $\mu^2 h \to 1$、$n \to 1$ および $(1-n)/\mu^2 h \to 1/3$ また $h \to \infty$ のときに $n \to 1/2$、またhの大きさにかかわらず $\mu\tanh\mu h = 1$ が成り立つ. 以上のことに注意して各項のオーダーを求めると表－1のようになる. 表中の記号はすべて次元量で示してあり、丸付き番号は式(4)、(5)の各項の下に付した番号であり、同じオーダーを持つものはひとまとめにしてある. またkh<<1とkh>>1に加えて、その中間の水深でのオーダーをkh~khの欄で示してある.

第④,⑤ 項は中間水深で従来述べられているように$(\nabla h)^2/(kh)^2$のオーダーを有しているが、h<<1の場合には第④,⑤ 項とも(kh)に独立で海底勾配のみの関数となっている. この時のオーダー $(\nabla h)^2/12$ は通常の海浜では十分に小さな値であり、容易に無視することができよう.

いわゆる非線形項に相当する⑥、⑦、⑧、⑪、⑫項のうち、⑦、⑧項はいずれの水深においてもka_0のオーダーとなるが、他の3項はh<<1の領域でa/hのオーダーを有している. a/hのオーダーは砕波点近傍および以浅で単純には無視できない大きさになるが、線形波動論においては無視されている項である.

水深　項	①③⑨⑩	②	④	⑤	⑥⑪⑫	⑦⑧
$k_0 h << 1$	1	0	$-\frac{1}{12}(\nabla h)^2$	$\frac{1}{48}(\nabla h)^2$	$\frac{a}{h}$	ka_0
$k_0 h \sim k_0 h$	1	0	$\frac{(\nabla h)^2}{(kh)^2}$	$\frac{(\nabla h)^2}{(kh)^2}$	$\frac{ka}{\tanh\cdot kh}$	ka_0
$k_0 h >> 1$	1	0	0	0	$k_0 a_0$	ka_0

表－1