

有限要素法による洪水氾濫解析に関する一考察

京都大学防災研究所 正員 岡 太郎・〇近森 秀高

1. はじめに これまで洪水氾濫解析には不定流(一次元)-貯留モデル¹⁾や二次元差分モデルが用いられている。これらのモデルの現地への適応性は広く認められているが、実用上の問題点も少なくない。ここでは、有限要素法を用いた洪水氾濫モデルについて、差分モデルによる計算結果と比較することにより、その特性および問題点を検討した。

2. 基礎方程式とGalerkin法による離散化 二次元氾濫の基礎方程式には、次の(1)~(3)式を用いる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial(h+z)}{\partial x} + uR^* = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial(h+z)}{\partial y} + vR^* = 0 \quad (3)$$

ここに、 h : 水深、 u, v : x, y 方向の流速、 g : 重力加速度。 uR^*, vR^* は抵抗を表す項で、ここではChezyの抵抗則を用い、 $R = g\sqrt{u^2+v^2}/(ch^2)$ (c : Chezy数)とする。解析領域を三角形要素を用いて分割し、形状関数に $N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta$ を用いると、(1)~(3)式は次のように離散化される。

$$M\dot{u} + H(u)u = F \quad (4)$$

ただし、

$$M = \begin{bmatrix} M_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & M_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & M_{ij} \end{bmatrix}, \quad H(u) = \begin{bmatrix} (u_k K_{ikj}^x + v_k K_{ikj}^y) & h_k K_{ikj}^x & h_k K_{ikj}^y \\ g H_{ij}^x & (u_k K_{ikj}^x + v_k K_{ikj}^y + R^* M_{ij}) & 0 \\ g H_{ij}^y & 0 & (u_k K_{ikj}^x + v_k K_{ikj}^y + R^* M_{ij}) \end{bmatrix}$$

$$F = (0 \quad -g H_{ij}^x z_i \quad -g H_{ij}^y z_i)^T, \quad u = (h \quad u \quad v)^T, \quad \dot{u} = (\dot{h} \quad \dot{u} \quad \dot{v})^T$$

$$M_{ij} = \begin{cases} \Delta/6 & (i=j) \\ \Delta/12 & (i \neq j) \end{cases}, \quad K_{ikj}^x = \begin{cases} b_k/12 & (i=j) \\ b_k/24 & (i \neq j) \end{cases}, \quad K_{ikj}^y = \begin{cases} c_k/12 & (i=j) \\ c_k/24 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$H_{ij}^x = b_i/6, \quad H_{ij}^y = c_i/6$$

ここに、 $b_i = y_j - y_k$ 、 $c_i = x_k - x_j$ 、 Δ : 三角形要素の面積、 T : 転置行列。

(4)式の $H(u)$ の計算に1時間ステップ前の u の値を用いて線形化し、時間項を2 step Lax-Wendroff法で離散化すると、次式が得られる。

$$\bar{M}u^{n+1/2} = \tilde{M}u^n - \frac{\Delta t}{2} (H(u^n)u^n - F) \quad (5)$$

$$\bar{M}u^{n+1} = \tilde{M}u^n - \Delta t (H(u^n)u^{n+1/2} - F) \quad (6)$$

ここに、 $\bar{M}$ は M の非対角項全てを対角項に集中させた集中行列、 $\tilde{M}$ は(7)式で表される修正集中行列である。

$$\tilde{M} = eM + (1 - e)M, \quad 0 \leq e \leq 1 \quad (7)$$

e : 集中化係数。(5)~(6)式の左辺で集中行列 $\bar{M}$ を用いるのは、逆行列の計算を避けるためと、計算の安定性を確保するためである。また、右辺で修正集中行列 $\tilde{M}$ を用いるのは、 M ($e=0$ に相当)のままで、(5)~(6)式の両辺でアンバランスが大きくなり、また、 $\bar{M}$ ($e=1$ に相当)を用いると無条件不安定になるので、両者の中間を選択してこれらの不都合を回避するためである。これまでのところ e の最適値は明らかでないが、川原らは0.7~0.95が適当であるとしている²⁾。

境界条件として、流入・出部には水深を与え、流入出のない境界では法線方向の流速成分に0を与える。

Taro OKA and Hidetaka CHIKAMORI

なお、洪水先端部の要素において、3 節点のすべての水深がある微小水深 ε 以下のときには、計算領域から除外する。

3. 氾濫シミュレーション 1600m×1200mの水平な長方形の領域に、幅400m、長さ200mの流入部を付け、流入点の水深を2mに固定して氾濫計算を行うことにする。解析領域を図1に示すように要素分割し(節点数231、要素数400)、 $\Delta t = 2 \text{ sec}$ 、 $c = 30$ 、 $e = 0.85$ 、 $\varepsilon = 1\text{mm}$ として得られた破堤600秒後の流速ベクトルを図2(a)に、等水深線を図3(a)に示す。また、差分モデル(leap frog法)³⁾による計算結果を図2(b)、図3(b)に示す。両者を比較すると、洪水の中心部の流速・水深については大きな差は認められないが、先端は有限要素法で計算を行った方が速く伝播する傾向がみられる。これは前述の(5)、(6)式の左辺の $\bar{M}$ と右辺の $\tilde{M}$ との間に生じるアンバランスの影響と考えられる。しかし、量的にはこの差はわずかであり、計算結果はほぼ同じであると考えられる。なお、有限要素モデルの一点の処理に要するCPUタイムは差分モデルの約3倍であり、有限要素モデルが必ずしも有利とは言えない。しかし、有限要素モデルは、その領域の離散化が容易であるため、複雑な形状の解析に有利である。

4. おわりに 有限要素モデルにおいて陽的取扱を行うためには集中化は避けられない。しかし、集中化を行うとバランスを損ない計算精度上問題が生じる。これらの点について形状関数や重み関数の取り方を含めてさらに基礎的検討が必要である。

《参考文献》

- 1) 岡：京大防災研年報 20B-2, pp. 201-215, 1977,
- 2) 川原：有限要素法 流体解析, 日科技連, 1985
- 3) 岩佐ら：京大防災研年報, 23B-2, pp. 305-317, 1980

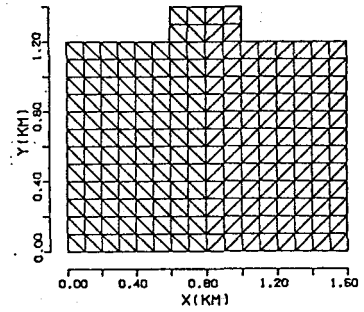
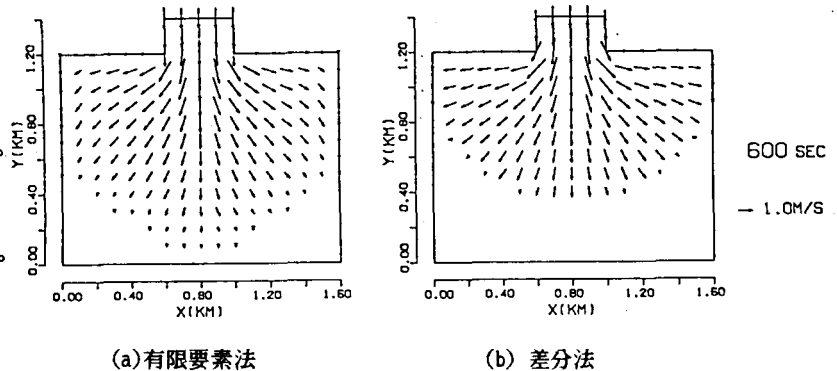


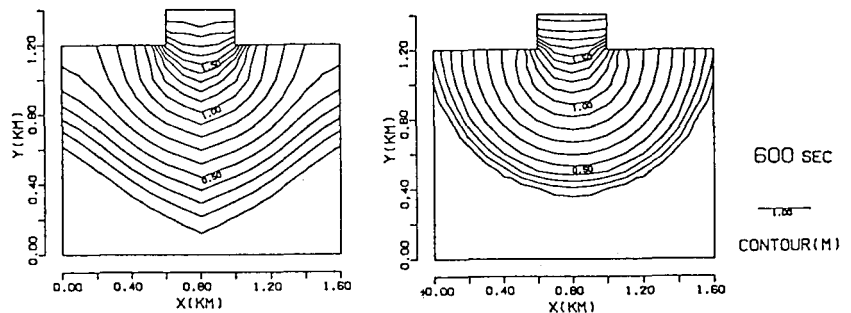
図1 要素分割図



(a)有限要素法

(b)差分法

図3 流速ベクトル図(破堤600秒後)



(a)有限要素法

(b)差分法

図3 等水深線図(破堤600秒後)