ダム群の確率制御の初期解について
――Fletcher 2次計画の適用――

京都大学工学部　正　員　高棹琢馬
京都大学工学部　正　員　椎葉充晴
京都大学大学院　学生員○劉　春燕

1．はじめに　筆者らは張ら[1]が提案したダム貯水池群実時間操作手法をもとに，計算時間を短縮するための手法を開発した。その手法はFletcher二次計画手法[2]を用いて，放流量系列の初期解を算定し，初期解のもとで，全体のUDU^T分解を使わずに統計的二次近似手法[3]を適用して，直接、共分散行列を更新する最適化手法である．本報告では，その計算機プログラム化の検討結果を提示する．

2．操作手法　Fletcher二次計画手法とは，m 次元変数 u の二次関数 f(u) を v 個の線形制約のもとで，最小にする問題

$$\min f(u)=1/2u^TAu-b^Tu \qquad \text{subject to} \quad c'u>=d' \tag{1}$$

の解を求めるために、activeな等式制約問題を次々と解いて，最終的に最適解を求めるものである。ここで、A,c',b,d' はそれぞれm m,v m,m,v次元のマトリックス，あるいは，ベクトル係数である．activeな等式制約を cu=d とすると，ラグランジュ式は

$$L(u,\lambda)=1/2u^TAu-b^Tu+\lambda^T(cu-d) \tag{2}$$

となり、その実行可能解u^*は，cu=d とすると，

$$u^*=u-H^*g \qquad (H^*=A^{-1}-A^{-1}c^T(cA^{-1}c^T)^{-1}cA^{-1}) \tag{3}$$

$$\lambda=-C^*g \qquad (C^*=(cA^{-1}c^T)^{-1}cA^{-1},g=Au-b) \tag{4}$$

である。対応するλの値が正の場合はその制約を等式制約から除く．全てのラグランジュ乗数が負になれば，そのときのu^*が最適解である．等式制約を入れ替えることによって，最終的に実行可能解を最適解へ導く．ダム操作問題において，このFletcher方法を各制御期間で適用する．

本報告では，初期解を求めるに当たって，全ての確率的な変数をその期待値と置き換えることによりダム貯水池操作の確率的な問題を確定的な問題に変換し，非線形的な目的関数をテーラー級数で近似する．つまり，LQP(線形推移，二次評価)システムにしてから，Fletcher方法を適用する．

張らは確率ベクトルの関数の大域的な近似手法である統計的二次近似手法を用いてLQG(線形推移,二次評価正規外乱)システムに問題を変換し,DDP[4]に似た手法を用いた手法Open-loop Feedback Controller(OLFC)によりコントロールを逐次決定する手法を提案した．張らの手法では、非線形関数を統計的に二次関数で近似するとき，共分散行列全体をUDU^T分解し，システムが推移するとき，共分散行列を UDU^T分解してから更新していたが，本研究では，確率変数の相関関係の分析により共分散行列を部分的に UDU^T分解し，システムが推移するとき，共分散行列を直接更新することによって，さらに，計算時間の短縮を図った．

3．定式化　本報告で考えている問題は次の問題である．

［目的関数］　$J=\sum_{k=0,\ldots,T-1}[E\{l_{k+1}(s_{k+1})+m_k(u_k)\}]$　(5)

［システム推移式］　$s_{k+1}=\Phi_k s_k+B_k u_k+\xi_k \qquad k=0,\ldots,T-1$　(6)

［コントロールの制約条件］　$u_{jk}^{min}\leqq u_{jk}\leqq u_{jk}^{max}, \quad j=1,\ldots,Nu;\ k=0,..,T-1$　(7)

［状態量の確率的制約条件］　$\int_{-\infty}^{s_{jk}^{min}} p(s_{jk},k)ds_{jk} \leqq \gamma_{jk}^{min},\ \int_{s_{jk}^{max}}^{+\infty} p(s_{jk},k)ds_{jk} \leqq \gamma_{jk}^{max}$　(8)
$j=1,\ldots,Ns;k=1,\ldots,T$

ただし，s_k:Ns 次元の状態ベクトル.添字kは時刻を表し,現在時刻を0とする.s_{jk}:s_kの第j成分.s_0:初期値としての平均値s_0,共分散P_{s0}の正規分布に従う確率ベクトル.u_k:Nu 次元のコントロールベクトル.u_{jk}:u_kの第

Takuma TAKASAO,Michiharu SHIBA,Chunyan Liu

j成分.ξ_k:平均値0，共分散 Q(t)の白色正規分布に従うNs次元の外乱ベクトル.ξ_kは白色系列で，かつ,s_0と相関がない.l_k:状態量の非線形関数.m_k:コントロールの非線形関数.B:Ns Nu次元の係数系列.E{.}はあらゆる確率要素に対する期待値を求めることを表す.$u_{jk}^{max}(t), u_{jk}^{min}(t)$:コントロールの上，下限.p(.,.)は今まで全ての観測と適用したコントロールという条件付きの状態量変数の確率密度関数である.$s_{jk}^{max}(t), s_{jk}^{min}(t)$:貯水量の上下限. $\gamma_{jk}^{max}(t), \gamma_{jk}^{min}(t)$ は状態量が制約条件を破ることを許す確率の許容値である.

4. 解法の概要　3.で定式化した問題の解法を概説する.制約条件(6),(7),(8)を満たすコントロールの系列 $\{u_k^{(i)}\}_{k=0,\dots,T-1}$を最適なコントロールの候補値として選び,これに対応する状態量 $\{s_k^{(i)}\}_{k=1,\dots,T}$を求める.この候補値の近傍で,目的関数Jの中の関数 l_kとm_kをそれぞれテーラー展開を用いて二次関数に近似し，問題をLQPシステムに変換する.状態量の上下限制約はペナルティ関数を目的関数に付加した拡大目的関数で対処する.つまり，状態量に関しては無制約な問題に置き換えた.後進DPを用いて、各ステップの目的関数をFletcher二次計画手法で最小にする.反復計算により最適な初期解(コントロール系列)を得る.

初期解をFletcher二次計画方法によって得た後、OLFCによって確率的な問題を取り扱う．その初期解系列の近傍で目的関数l_kとm_kをそれぞれ統計的二次近似とテーラー展開を用いて，二次関数に近似し，問題をLQGシステムに変換する．これをDDPに似た手法を用いて、反復計算により，最適なコントロールを得る.

5. 適用　図-1に本手法の適用例を示す。

6. おわりに　本研究で提案した手法は特に以下の点で有効である。1)DDPに似た手法を用いることによって、「次元の呪い」という問題が全く発生しない。2)目的関数の状態ベクトルに関する部分は統計的二次近似を用いて二次関数に近似する。状態ベクトルが確率変数であるから、テーラー展開を用いて局所的に近似するよりも大域的に近似する統計的二次近似を用いる方がよい。3)Fletcher二次計画方法を用いて確定問題の最適解を導き、その最適解を初期解として、統計的二次近似手法を用いて確率問題を扱う。本研究で提案した方法は張らの方法より計算時間が短いという特徴を持つ。

適用例： 状態量ベクトルの次元Ns=2，コントロールベクトルの次元Nu=2，制御期間T=6

目的関数　$\min_{\{u_k\}_0^{T-1}}\{ J= E\{\Sigma_{k=0,\dots,T-1}(l_{k+1}(s_{k+1})+m_k(u_k))\}$　ただし，

$m_k(u_k)=\cosh(u_{1,k}-b_{1,k})+\cosh(u_{2,k}-b_{2,k})$、

$l_{k+1}(s_{k+1})=\cosh(s_{1,k+1}-a_{1,k+1})+\cosh(s_{2,k+1}-a_{2,k+1})$

$$a_{jk}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.85 & 0.9 & 0.95 & 1.0 & 1.05\\ 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1.0 & 1.1\end{bmatrix}$$

$$b_{jk}=\begin{bmatrix}b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15}\\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.5 & 2.55 & 2.6 & 2.65 & 2.7 & 2.75\\ 2.3 & 2.4 & 2.5 & 2.6 & 2.7 & 2.8\end{bmatrix}$$

システムの推移方程式　$s_{k+1}=\phi_k s_k+B_k u_k+C_k+\xi_k$　　$k=0,\cdots,T-1$　　ただし、

$$\phi_k=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ B_k=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\ C_k=\begin{bmatrix}0.3\\ 0.0\end{bmatrix}\ Q\xi_k=\begin{bmatrix}0.3 & 0\\ 0 & 0.3\end{bmatrix}\ \bar{s}_0=\begin{bmatrix}0.7\\ 0.7\end{bmatrix}\ P_{s0}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.0\\ 0.0 & 0.3\end{bmatrix}$$

コントロールに関する制約条件　$0.0\leqq u_{ik}\leqq 3.0$, $i=1,\cdots,Nu$; $k=0,\cdots,T-1$

状態量の制約　$0.0 \leqq s_{ik} \leqq 3.0$, $i=1,\dots,Ns$; $k=0,\dots,T$, $\gamma_{ik}^{min}=0.2$, $\gamma_{ik}^{max}=0.2$

計算結果を左下に示す。この計算は京都大学大型計算機センターのM-780システムで行った。なお、msは1/1000秒を表す。

方法	張ら方法	初期解	本方法
目的関数	43.276	28.61	43.276
cpu時間	138(ms)	30(ms)	94(ms)

図-1 本手法の適用例　(問題の定式化とその結果)

参考文献　1) 張 児玉 椎葉 高棹：統計的二次近似による貯水池群の実時間操作，京都大学防災研究所年報第30号B-2,pp.299-321,1987. 2) Fletcher,R.:A GENERAL QUADRATIC PROGRAMMING ALGORITHM,J.INST.MATH. ITS APPL.,7,76-91,1971.3) 高棹 椎葉 富沢：統計的二次近似理論を適用した流出予測システムの構成、京大防災年報第27号b-2,1984. 4) GEORGAKAKOS, A.P.AND D.H.MARKS: REAL TIME CONTROL OF RESERVOIR SYSTEMS,Dept. of Civil Engineering, M.I.T., TR No. 301, Cambridge,Mass. , 1985. 5) JACOBSON, D. AND D. MAYNE:DIFFERENTIAL DYANAMICPROGRAMMING,Elsevier,New York,1970.