非圧縮粘性流れの数値計算法の検討

京都大学大学院　学生員　○山本 圭介
京都大学防災研究所　正　員　山下 隆男
京都大学防災研究所　正　員　土屋 義人

1．はじめに　近年，数値計算法およびコンピューターの進歩に伴ってNavier-Stokes方程式を低Reynolds数から高Reynolds数に至る広範囲領域で直接数値計算する試みが頻繁に行われるようになり，これが数値流体力学の構築および，数値計算法の進歩を助長するといった好循環を形成している．Navier-Stokes方程式の解の存在は未だ数学的に解明されていないが，数値解としてはかなりの高Reynolds数まで得られている．

本研究では，各種数値計算法の特性を明らかにすることを目的として，非圧縮粘性流体の各種計算法を比較する．ここでは，正方キャビティ内の流れを対象として Dennis-Chang法，MAC法(Marker and Cell法)およびFEM&MAC法で計算し，それらの計算上の特性を検討した．

2．数値計算法の概説　図１に計算領域を示す．基礎式は次式で与えられる．

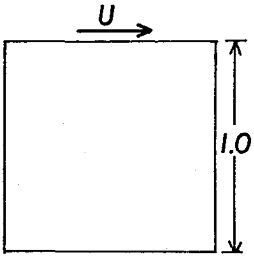


図 1　計算領域

$$\frac{du}{dt} = -\nabla p + \nu \Delta u \qquad -(1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad -(2)$$

ここに，u：２次元流速ベクトル，p：圧力．また，境界条件は次式で与える．

$$\left.\begin{array}{ll} u = 1.0, & v = 0.0 \\ n_x p - \nu u_{,n} = 0, & n_y p - \nu v_{,n} = 0 \end{array}\right\} \qquad -(3)$$

以下にここで対象とした計算法の概要を示す．

① MAC法

式(1)の差分方程式と，式(1)，(2)より得られる次式の差分式を用いて流速uと圧力pを求める．

$$\Delta p = -\nabla\nabla : uu \qquad -(4)$$

式(4)の圧力pの解法として，ここではガウス消去法およびSOR法を用いた．

② Dennis-Chang 法

基礎式は，式(1)より得られる渦度輸送方程式，すなわち次式である．

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu \Delta \omega \qquad -(5)$$

$$\Delta \psi = -\omega \qquad -(6)$$

これより，流れ関数ψと渦度ωを求める．式(5)の差分方程式は，次式で示される．

$$C_{CD}(\omega) = D(\omega) + O(h^2) \qquad -(7)$$

$$C_{UD}(\omega) = D(\omega) + O(h) \qquad -(8)$$

ここに，$C(\omega)$は対流項，$D(\omega)$は拡散項である．この方法は，次式の収束計算により渦度ωを求め，また，式(6)の差分式をSOR法を用いて解き，流れ関数ψをもとめる．

$$C_{UD}(\omega^{(n+1)}) - D(\omega^{(n+1)}) = C_{UD}(\omega^{(n)}) - C_{CD}(\omega^{(n)}) \qquad -(9)$$

ここでは，ωの計算に用いるダンピング係数について，a)0.1(fixed)，b)0.1-1.0(100stepごとに変化)，c)0.05-1.0(50stepごと)，d)0.05-1.0(20stepごと) の４ケースで計算を行った．

③ FEM&MAC法(SMAC法)

式(1)より得られる次式と式(2)から，ガレルキン法により，流速uおよび圧力pを求める．

Keisuke YAMAMOTO , Takao YAMASHITA , Yoshito TSUCHIYA

$$\left.\begin{aligned} u^{n+1} &= u^{n} - \{(uu)^{n}_{,x} + (uv)^{n}_{,y} + p^{n+1}_{,x} - (u^{n}_{,xx} + u^{n}_{,yy})\}\Delta t \\ v^{n+1} &= v^{n} - \{(uv)^{n}_{,x} + (vv)^{n}_{,y} + p^{n+1}_{,y} - (v^{n}_{,xx} + v^{n}_{,yy})\}\Delta t \end{aligned}\right\} \quad \text{-(10)}$$

3．数値計算結果および計算法の比較

Re = 100 の場合について，ＭＡＣ法および Dennis-Chang法を用いて計算した結果を示す．まず，表１は，それぞれの1,000stepまでのＣＰＵ時間である．また，図２は，反復回数とRelative errorの関係を示す．これは，各点の流速ｕの修正値の平均の変化を表したものである．さらに，図３は，流速ベクトルと流線を示したものである．

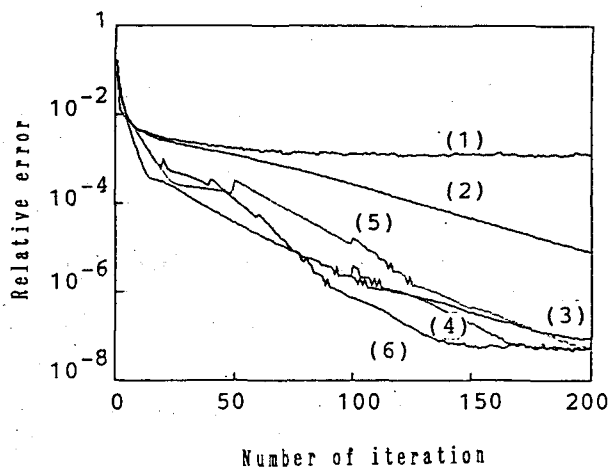
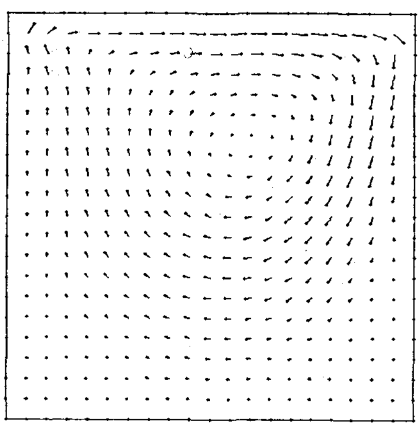


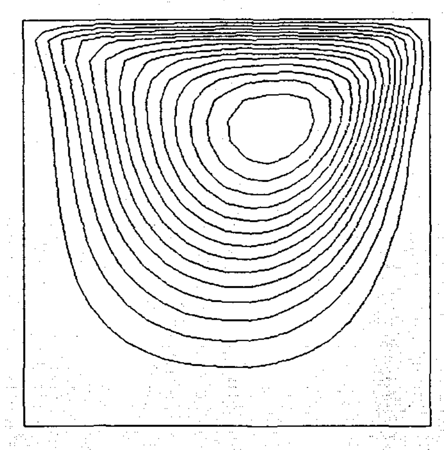
図２　流速ｕの修正値の変化

表 1　1,000stepまでのＣＰＵ時間

Method	CPU time
(1) MAC (Gauss)	9082.232
(2) MAC (SOR)	27088.947
(3) Dennis-Chang (a)	1467.830
(4) Dennis-Chang (b)	1448.559
(5) Dennis-Chang (c)	1728.987
(6) Dennis-Chang (d)	1553.574



(a)　流速ベクトル図



(b) 流　線

図 3　Re = 100 の場合の正方キャビティ内の流れ