周波数域積分方程式法によるクラック解析

京都大学　○中村信秀*（学生会員）、西村直志**（正会員）、小林昭一***（正会員）

1．序論

等方均質な３次元線形弾性体中のクラックの動的解析を行った。解析においては定常問題を取り扱い、これを積分方程式法によって数値解析する。

2．定式化

今、考える領域Dを$R^3 \setminus S$ とし、滑らかな、縁∂Sを持つ閉曲面Sをクラックとする。定常動弾性の境界値問題は、

$$\Delta^* u + \rho\omega^2 u = 0 \quad \text{in} \quad D \qquad (\Delta^* u := \mathrm{div}\, C[\nabla u]) \qquad (1)$$

$$T u^{\pm} = 0 \qquad \text{on} \quad S \qquad (T u := n \cdot C[\nabla u]) \qquad (2)$$

$$\lim_{x \to x_0} [u^+(x) - u^-(x)] = 0, \quad x \in S \quad, x_0 \in \partial S \qquad (3)$$

及び$u - u_I$に対する放射条件を満たすベクトル場uを求める問題である。ここで、Cは弾性定数、u_IはR^3で式（１）を恒等的に満たす変位場（物理的には入射波）、nはS上の単位法線ベクトル、ρは密度、ωは周波数、変数の肩の＋（－）はnの向く方（その反対）からのlimit を表す。

その様なuは次の二重層表示を有する［１］。

$$u = \int_S \Gamma_I \phi \, dS + u_I \qquad (4)$$

ここで、ϕは開口変位、Γ_Iは二重層核、即ち

$$\Gamma_I := T\Gamma \qquad (5)$$

であり、Γは基本解、即ち

$$(\Delta^* + \rho\omega^2 1)\, \Gamma = -\delta 1 \qquad (6)$$

を満たす２階のテンソル場である。ここでδ及び１は各々Dirac のデルタ、単位テンソルである。式（２）より次の積分方程式が得られる。

$$0 = \mathrm{pf} \int_S T \Gamma_I \phi \, dS + T u_I \qquad (7)$$

ここで、pfは積分の有限部分を表す。

3．数値解析

式（７）の右辺第１項は高い特異性を示す。その正則化は基本解の陽な形を用いずに応力関数を用いた形に書き換えて行う［２］。

$$\begin{aligned}\left(\int_S T\Gamma_I(x, y)\phi(y)\, dS\right)_a = &-\int_S (n_b(x) - n_b(y))\, e_{aip} e_{biq} e_{dls} \partial x_i \cdot \\ &\cdot \partial x_i \partial y_l \Phi_{pqrs} (n_c e_{ckr} \phi_{d,k})\, dS - \mathrm{pf}\int_S e_{aip} e_{dls} \partial x_i \partial y_l \Phi_{pqrs} n_b \cdot \\ &\cdot e_{biq} \partial y_i (n_c e_{ckr} \phi_{d,k})\, dS + \int_S n_b(x) \Psi_{abcd} n_c(y) \phi_d \, dS \qquad (8)\end{aligned}$$

ここで、eは交代記号、∂x_iはx_iについての偏微分、Φは応力関数、Ψは可積分オーダーの特異性を有する核である。

4．計算結果

ϕの形状関数としてBスプライン関数を用い［３］、楕円形の平面クラックの解析を行う。要素分割は

*Nobuhide NAKAMURA, **Naoshi NISHIMURA, ***Shouichi KOBAYASHI

楕円を円に変換した後、Fig.1の様に半径方向と円周方向にそれぞれ分割しスプライン関数を用いる。

$x_1 = a\cos\theta,\qquad x_2 = b\sin\theta,\qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)\qquad (9)$

Fig.2は平面p波がクラック面に垂直に入射する時の波数とMODE I の応力拡大係数の関係を表していて、図中の曲線は計算結果をスプライン補間しており、また入射波による応力の振幅はp_oとしているいる（a／b＝2,Poisson比0.3）。Fig.3は波数を小さくして（$k_T b = 0.001$）Irwinの静弾性の解析解［4］と比較したものである。 Fig.4は平面S波がクラック面に垂直に入射する時のクラックの縁に沿ったMODE II & IIIの応力拡大係数の変化を表していて、図中の曲線はMartin & Wickhamの解を表しており［5］、また入射波による応力の振幅はp_oとしている（a／b＝1,Poisson比0.3,波数$k_T a = 0.8$）。 また、計算時間は京都大学大型計算機センターのVP400ベクトル計算機を用いてCPU-TIME 約200秒である。

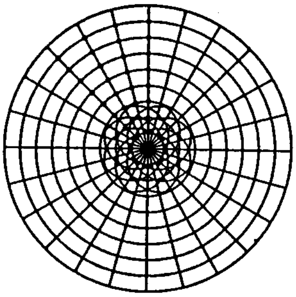

Fig. 1

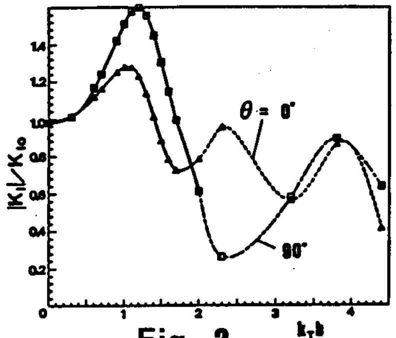

Fig. 2

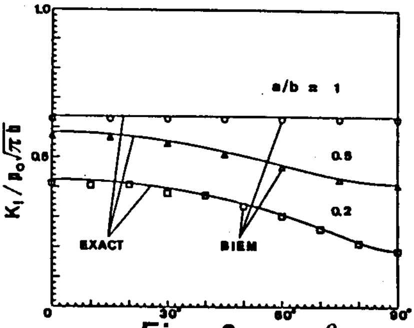

Fig. 3

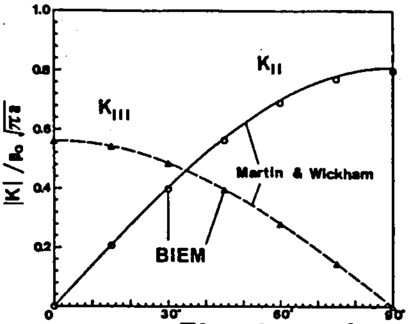

Fig. 4

（参考文献）

［1］金子正洋(1987)：「積分方程式法による３次元クラックの動的解析」、京都大学修士論文（土木）

［2］西村直志、小林昭一(1987)：「弾性学に於ける二重層ポテンシャルの微分の正則化について」、第４回境界要素法シンポジウム論文集p49-54

［3］N.Nishimura & S.KOBAYASHI(1988)：「An improved boundary integral equation method for crack problems」In:Cruse,T.A.(Ed):Proc. IUTAM Symposium on Advanced boundary Element Methods. to apear

［4］Irwin,G.P.(1962)：「Crack-extension force for a part-through crack in a plate」,J.Appl. Mech. 29,p651-654

［5］Martin,P.A.& Wickham,G.R.(1983)：「 Diffraction of elastic waves by a penny-shaped crack」Proc. Roy. Soc. London (A) ,p91-129