衝撃問題に対する剛体バネモデルと陽的解法の適用性について

大阪市立大学工学部　正員　○上林　厚志
金沢大学工学部　正員　桝谷　浩
大阪市立大学工学部　正員　園田恵一郎

1．まえがき　個別要素法[1)]で知られる陽な差分法をバネと剛体によって離散化した連続体に適用し動的シミュレーションとして，衝撃応答問題をどの程度解明できるかを検討する．

2．計算手順　微小変形をする連続体を対象とし，要素間の接触判定は行わない．今，図1に示すような隣り合う2要素i, jを考える．2要素間の軸方向バネK_nとせん断バネK_sの伸びn_{ij}, s_{ij}は，2要素の変位および回転角を用いて次式のように表せる．

$$n_{ij}=u_j-u_i,\quad s_{ij}=v_j-v_i-(d\ell/2)(\theta_i+\theta_j) \qquad (1)$$

各バネにより要素に作用する力N_{ij}, S_{ij}は

$$N_{ij}=K_n\cdot n_{ij},\quad S_{ij}=K_s\cdot s_{ij} \qquad (2)$$

となる．次に任意時刻tにおける要素iの運動方程式(ただし非減衰)より時刻tにおけるx, y方向と回転の加速度$\ddot{u}_{i,t}$, $\ddot{v}_{i,t}$, $\ddot{\theta}_{i,t}$は次のように表せる．

$$\ddot{u}_{i,t}=\Sigma X_i/m_i,\quad \ddot{v}_{i,t}=\Sigma Y_i/m_i,\quad \ddot{\theta}_{i,t}=\Sigma M_i/I_i \qquad (3)$$

ここにΣX_i, ΣY_i, ΣM_iは，要素iに作用する各変位方向に働く力の和であり，m_i, I_iは要素iの質量及び慣性モーメントである．時刻t+⊿tにおける変位速度は上式を時間増分⊿tに関する積分を行い，

$$\dot{u}_{i,t+\Delta t}=\dot{u}_{i,t}+\ddot{u}_{i,t}\cdot\Delta t,\quad \dot{v}_{i,t+\Delta t}=\dot{v}_{i,t}+\ddot{v}_{i,t}\cdot\Delta t$$
$$\dot{\theta}_{i,t+\Delta t}=\dot{\theta}_{i,t}+\ddot{\theta}_{i,t}\cdot\Delta t \qquad (4)$$

上式をさらに⊿tで積分すれば，時間増分⊿t間の変位増分は，

$$\Delta u_{i,t+\Delta t}=\dot{u}_{i,t}\cdot\Delta t,\quad \Delta v_{i,t+\Delta t}=\dot{v}_{i,t}\cdot\Delta t,$$
$$\Delta\theta_{i,t+\Delta t}=\dot{\theta}_{i,t}\cdot\Delta t \qquad (5)$$

このようにして定められた変位増分から新たな変位を求め，再び式(1)から式(5)までの演算を繰り返す．

3．1次元衝撃問題　図2(a)に示すようなステップ状の衝撃荷重を受ける一端固定棒を考える．これを図2(b)に示すようにn(=10)分割し，n+1個の要素に分ける．図3に本解析と級数解による棒中央の変位と応力の応答曲線を示す．図中，Aは棒の断面積で，V_sは静的にF_0が作用した場合の棒自由端の変位である．変位はほぼ一致しており，応力は級数解では規則的な矩形波であるが本解析では立ち上がり後，振動しながら級数解に近づいていく．⊿tを応力波が1要素間を伝播する時間($\Delta t_0=d\ell/\sqrt{E/\rho}$)

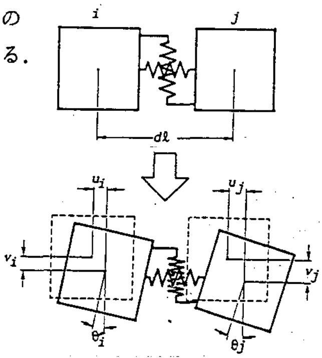

図1．剛体バネモデルと要素変位

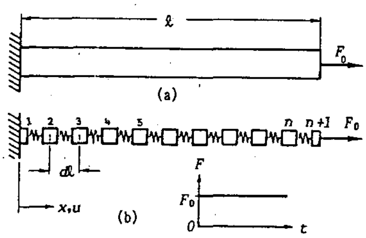

図2．要素分割とステップ状の衝撃荷重

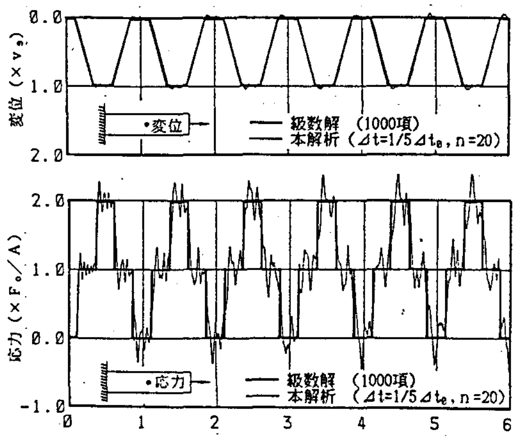

図3．棒中央点の変位と応力の応答曲線

Atsushi KAMBAYASHI, Hiroshi MASUYA, and Keiichiro SONODA

と一致させた場合はきれいな矩形波となり，⊿ｔ＞⊿ｔ$_{B}$の場合,要素が大きく振動し発散する．本例では⊿ｔ＝1／5・⊿ｔ$_{B}$で十分に収束している.要素分割数を大きくすると時間による乱れは少なくなるが，細かい振動は残り，その立ち上がりの際の振幅は変わらない．要素分割数を増加させ，⊿ｔを小さくした場合，非常に小さな応力が伝達され，変位を計算する際に，アンダーフローを生じることがあった．

4．弾塑性はりの横振動問題　計算の対象としては図4に示すような両端単純支持の長いはりがスパン中央に定速度集中横衝撃荷重を受ける場合を考える．せん断と軸力方向のバネだけをもつ一列の要素では曲げモーメントを伝達できないので図5に示すように各要素間にせん断バネと回転バネを用いた．図6に時間ｔ＝ｔｄ（0.87 ms)におけるたわみ曲線を示す.本解析値は粗い計算にもかかわらず既往の実験値[2]とよく一致している．

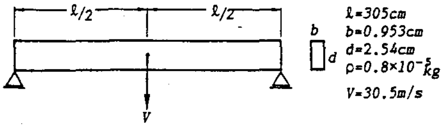

図4．定速度集中横衝撃荷重を受ける単純はり

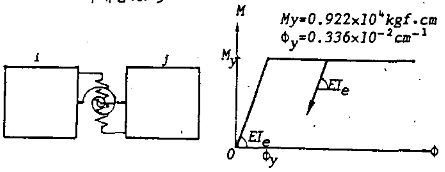

図5．せん断バネと弾塑性回転バネ

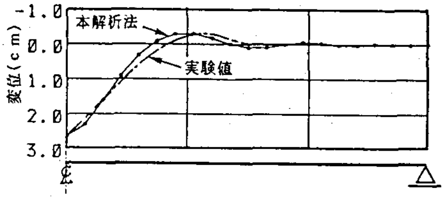

図6．時間td(＝0.87ms)におけるたわみ曲線

5．平面ばりの衝撃問題　はり上辺にステップ状の等分布衝撃荷重が作用する平面ばりを対象とする．図7に要素分割と境界条件を示す．はりを平面応力問題として取扱い，２次元動弾性論に基づいた固有関数展開法による理論解[3]と比較する．図8に中央点(スパン中央，高さ中央)の鉛直方向の応力(σ_y)の時間変化を示す．図の横軸Ｔは縦波が高さhを伝播するのに要する時間で無次元化したものであり，縦軸は荷重強度ｑで無次元化した応力である．理論解では初期状態から図中の①において載荷辺端部からのせん断波が到達するまでは，３．で示した１次元問題と同じ応力状態であり，その後②の部分で一度大きくなり，③で下端からの反射波が到達し，負の応力が生じている．一方，はりのスパン方向に６０分割，はり高方向に１６分割した場合の本解析法の計算結果では，①の部分では１次元の場合と同様に(図３参照)振動しながら矩形波に近づいているが，一次元のように一定の減衰振動のようでなく下向きに振幅の中心が向かっており，載荷辺端部からのせん断波（横波）が到達していると思われる③，④においても同様のことが言える．

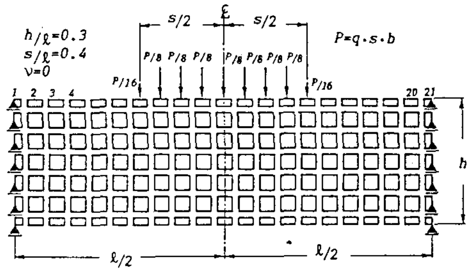

図7．要素分割と境界条件(横20分割の場合)

5．まとめ　簡単な剛体バネモデルを用いた陽的差分法による計算であるにもかかわらず本解析法による結果は既往の理論解および実験値とほぼ一致している．よって，本解析法は衝撃問題の解明に有効であることが判った．

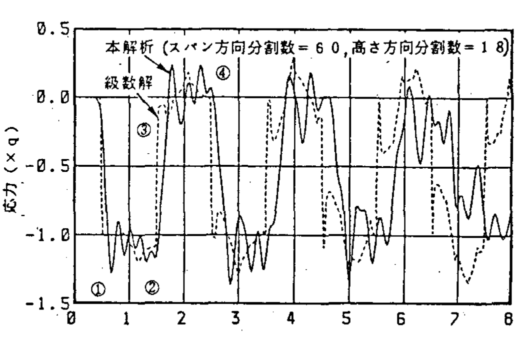

図8．はり中央点の高さ方向の応力の応答曲線

6．参考文献

1）Cundall, P.A.: Explicit Finite-Difference Method in Geomechanics, Numerical Methods in Geomechanics, Vol. 1, pp.132-150, 1976.

2）川井，都井：はりおよび平板の横衝撃応答問題に対する新しい離散化解析法，日本機械学会論文集（Ａ編），45巻，389号，1979.1.

3）奥田，小林，園田：衝撃荷重を受ける平面梁の応力波伝播解析，土木学会第43回年次学術講演概要集・第Ｉ部門，pp.898-899，1988.10.