境界要素法の高速アルゴリズム

JR西日本　正会員　○田中俊作，　中央復建コンサルタンツ　正会員　山口耕治
京都大学　正会員　　西村直志　　京都大学　　　　　　　　　正会員　小林昭一

1．はじめに

この報告は，境界要素法の高速化の一貫として，動弾性問題を対象として，ベクトルプロセッサー VP-400 に適したアルゴリズムを開発した結果を述べたものである．

ベクトル化計算の鍵は最も内側のDOループを如何に大きく取るかである．ここで開発したアルゴリズムの要点は，数値積分に際して，要素毎にGauss積分を行うという従来の方法の発想を転換して，Gauss点を固定して総ての要素に関する積分を行うようにした点である[1,2]．

2．積分方程式とその離散化

時間調和な動弾性問題を考えると，滑らかな境界Sの外部問題の積分方程式は次のように与えられる．

$$0.5\mathbf{I}\mathbf{u}(\mathbf{x})=\int_S\{\Gamma_I(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{u}(\mathbf{y})-\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{t}(\mathbf{y})\}dS_y+\mathbf{u}^I(\mathbf{x}) \tag{1}$$

ここに，$\mathbf{u}(\mathbf{x})$，$\mathbf{t}(\mathbf{x})=\mathbf{T}\mathbf{u}(\mathbf{x})$はそれぞれ変位，表面力ベクトル，Tは表面力作用素，Γ，$\Gamma_I=\Gamma\mathbf{T}$はそれぞれ基本解テンソル，Iは恒等テンソルである．なお，$\mathbf{u}^I(\mathbf{x})$は入射波の変位場である．

この式を，局所基底関数 $N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$（$\boldsymbol{\xi}$は正規座標，$\xi_3$は要素の外向き法線方向に取る）を用いたアイソパラメトリック要素

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})=\sum_{\alpha=1}^{S}N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x}^{\alpha},\quad \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})=\sum_{\alpha=1}^{S}N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}^{\alpha},\quad \mathbf{t}(\boldsymbol{\xi})=\sum_{\alpha=1}^{S}N^{\alpha}(\xi)\mathbf{t}^{\alpha} \tag{2}$$

（$\mathbf{x}^{\alpha}$，$\mathbf{u}^{\alpha}$，$\mathbf{t}^{\alpha}$は節点番号αの点の座標，変位及び表面力，Sは要素の境界上の節点数）を用いて離散化すると，次のような代数方程式を得る．

$$0.5\mathbf{I}\mathbf{u}(\mathbf{x})=\sum_{J=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{S}\mathbf{u}^{\alpha(J)}\int_{S(J)}\Gamma_I(\mathbf{x},\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})^{(J)})N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})J(\boldsymbol{\xi})^{(J)}dS(\boldsymbol{\xi})$$
$$-\sum_{J=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{S}\mathbf{t}^{\alpha(J)}\int_{S(J)}\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})^{(J)})N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})J(\boldsymbol{\xi})^{(J)}dS(\boldsymbol{\xi}) \tag{3}$$

ここに，$\int_{S(J)}(\ )dS(\boldsymbol{\xi})$は要素J上の積分を，$\alpha(J)$は要素Jの節点$\alpha$を，$J(\boldsymbol{\xi})^{(J)}$は要素Jに関するJacobianを，$\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})^{(J)}$は要素J上の選点を意味する．

なお，上式に現れる積分を，特異積分を除いた残りをGauss積分で評価すると，例えば，

$$\int_{S(J)}\Gamma_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})^{(J)})N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})J(\boldsymbol{\xi})^{(J)}dS(\boldsymbol{\xi})\doteqdot\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Gamma_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})^{(J)})N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})w_m w_n J(\boldsymbol{\xi}) \tag{4}$$

のようになる．ここに，w_m，w_nはξ_1，ξ_2軸上のGauss積分の重みである．なお，特異積分は別に評価する．これらを式(3)に代入し，与えられた境界条件のもとで解けばよい．

3．計算のアルゴリズム

式(3)に式(4)を代入した形では，例えば，

$$\sum_{J=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{S}t_i^{\alpha(J)}\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Gamma_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})^{(J)})N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})w_m w_n J(\boldsymbol{\xi}) \tag{5}$$

のようなものが現れる．後の都合上で，この積分のGauss積分の部分を次のように書いておく．

$$K\ (n(\mathbf{x})_k,n(K(J))_i\ )=\sum_{m=1}\sum_{n=1}\Gamma_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})^{(J)})N^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})w_m w_n J(\boldsymbol{\xi}) \tag{6}$$

Shunsaku TANAKA, Koji YAMAGUCHI, Naoshi NISHIMURA, Shoichi KOBAYASHI

ここに，n(**x**)は評価点**x**の節点番号を，n(α(J))は要素Jの要素内番号αの節点番号を示す．また，添え字i,kは，それぞれ3次元方向成分である．なお，節点の総数をMとすると，K $(n(\mathbf{x})_k, n(K(J))_i)$ は，3Mx3Mの正方行列の要素である．

(a)通常のアルゴリズム

通常は，式(6)を，先ず評価節点**x**を決め，ついで要素Jを決めて，Gauss積分を実施し，節点α(J)に関する係数を求めている．これを式で略記すれば次のようである．

$$\underset{n(\mathbf{x})=1}{\overset{M}{\mathrm{DO}}}\ \underset{J=1}{\overset{N}{\mathrm{DO}}}\ \underset{k=1}{\overset{3}{\mathrm{DO}}}\ \underset{i=1}{\overset{3}{\mathrm{DO}}}\ \sum_{m=1}\sum_{n=1}\Gamma_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\xi)^{(J)})N\ \ (\xi)w_m w_n J(\xi) \qquad (7)$$

ここに，$\underset{n(\mathbf{x})=1}{\overset{M}{\mathrm{DO}}}\ \underset{k=1}{\overset{3}{\mathrm{DO}}}$ は行列の行成分n(**x**)$_k$に値を代入していく作業を，また $\underset{J=1}{\overset{N}{\mathrm{DO}}}\ \underset{i=1}{\overset{3}{\mathrm{DO}}}$ は列成分n(α(J))$_i$に値を入れていく作業を意味している．これを”節点固定型アルゴリズム”と呼ぶことにする．

(b)ベクトル計算用のアルゴリズム

最も内側のDOループを最も長くするようなアルゴリズムを考える．先ず，Gauss点を決め，要素Jを決め，評価点**x**を決める．数値積分は，方向k,i及び要素内節点αに関して独立に行って，行列の該当した成分K(n(**x**)$_k$,n(α(J))$_i$)に加えていって，行列3Mx3Mをつくる．これを略記すれば，

$$\sum_{m=1}\sum_{n=1}\ \underset{J=1}{\overset{N}{\mathrm{DO}}}\ \underset{n(\mathbf{x})=1}{\overset{M}{\mathrm{DO}}}\ \underset{k=1}{\overset{3}{\mathrm{DO}}}\ \underset{i=1}{\overset{3}{\mathrm{DO}}}\ \Gamma_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\xi)^{(J)})N_K(\xi)w_m w_n J(\xi) \qquad (8)$$

と順序を変えた上で，$\underset{k=1}{\overset{3}{\mathrm{DO}}}\ \underset{i=1}{\overset{3}{\mathrm{DO}}}$ を展開すればよい．この場合には，最も内側のDOループの範囲は，節点数なる．これを”ガウス点固定型アルゴリズム”と呼ぶことにする．

なお，２次元問題も同様である．但し，動弾性の問題では，基本解に特殊関数が現れるので，現時点では，それをベクトル計算に乗るように直しておくことが必要である．

４．計算効率

例として，２次元動弾性問題を解いた場合について，節点数と計算時間の関係を図-1に示した．この結果より，”ガウス点固定型アルゴリズム”の有効性が分かる．なお，解析的に積分を行うことができれば，上述のアルゴリズムのGauss積分の部分が省略できて，効率的なベクトル計算ができることは言うまでもないであろう．

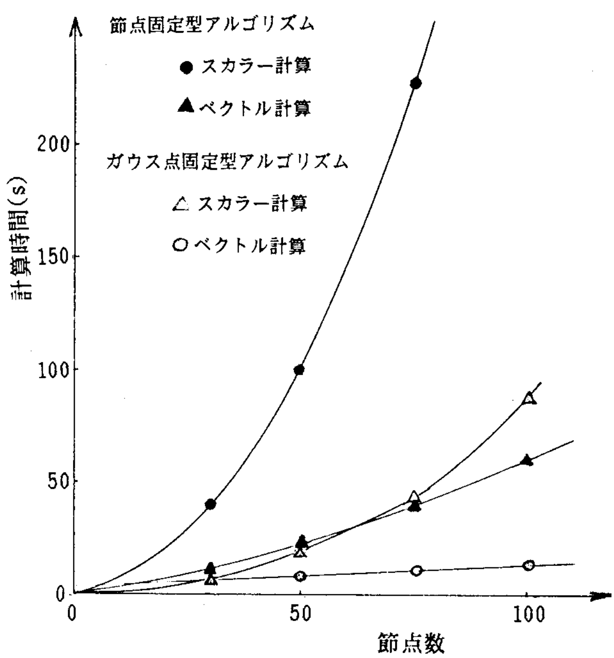

図-1　節点数と計算時間（２次元動弾性問題）

参考文献

1)山口耕治：Ｖ．Ｐ．によるＢＩＥＭプログラムの高速化，京都大学修士論文，1988.

2)神谷，西村，小林：ベクトル化計算によるＢＥＭの効率化とその弾性問題への適用，境界要素法論文集第5巻，pp.81-84,1988.