

## 対数正規分布の母数推定法と確率水文学の変動性

京都大学工学部 正 員 高 棹 琢 馬

京都大学工学部 正 員 宝 馨

京都大学大学院 学生員 清水 章

1. 緒言 3母数対数正規分布について種々の母数推定法が提案され慣用されている。母数推定値および確率水文学の変動性を比較することにより、どの方法を用いるのが良いのか明らかにする。モンテカルロ・シミュレーションによってデータ数とも関連づけて検討した。

2. 3母数対数正規分布(LN-3) ・分布関数:  $F(x) = \Phi(y)$ ,  $\Phi$ は標準正規分布関数 ・確率密度関数:

$f(x) = 1 / \{ \sigma_y (x - a) \log_{10} \sqrt{2\pi} \} \cdot \exp(-y^2/2)$  ・標準変数:  $y = \{ \log_{10}(x - a) - \mu_y \} / \sigma_y$

3. 母数推定法 以下の母数推定法について検討した。★最尤法→最適化プログラムにより尤度関数を最大化: ★最小二乗法→標準変数について最小二乗法を適用、プロットングポジション公式として Hazen 公式、Weibull 公式の2つについて検討: ★積率法→標本積率を母集団積率と等値して母数を推定、歪係数として標本歪係数、不偏歪係数、Bobee-Robitailleの偏り補正式<sup>1)</sup>による歪係数の3方法について検討: ★石原・高瀬の方法→データ数と標本歪係数から母歪係数の推定値を与える石原・高瀬の図表を計算機プログラム化: ★岩井改良法→LN-3分布に従うN個の順序統計量  $x_i$ , ( $i=1, \dots, N$ ) について  $x_i$  の変換変数  $y_i$  と  $x_{N-i+1}$  の変換変数  $y_{N-i+1}$  の間に成立する関係式  $y_i = -y_{N-i+1}$  より母数を推定: ★Sextile 法<sup>2)</sup>→分布関数  $F(x_{(j)}) = j/6$ , ( $j=0, \dots, 6$ ) となる区間境界値  $x_{(j)}$  についてSextile mean,  $w_j = \int_{x_{(j-1)}}^{x_{(j)}} 6xf(x)dx$  の平均値, 標準偏差, 差の比  $(= (w_2 - w_1) / (w_6 - w_5))$  より母数を推定 (ただし,  $x_{(0)} = -\infty$ ,  $x_{(6)} = +\infty$ )。

4. 方法 以下に母数推定値および確率水文学の変動性の評価手順を示す。①LN-3分布の母数  $\mu_y$ ,  $\sigma_y$ ,  $a$  を想定し (これを真値とする), この分布に従う乱数をN個発生させる。②各々の推定法による母数および確率水文学の推定値を記録する。③作業②をM回繰り返して各方法による母数および確率水文学の平均値 (推定値) と標準偏差 (推定誤差) を算定する。④推定値の真値からの偏倚が小さくかつ推定誤差が小さいものが良い推定法であると結論する。また, ⑤Nを変化させて, 確率水文学の推定誤差がどのように推移するのか, すなわちデータ数と確率水文学の変動性との関係を調べる。

表-1 母数推定値と確率水文学およびその推定誤差 (N=100, M=100)

| 母 数 推 定 法       | $\mu_y$<br>2.00 : 真値 | $\sigma_y$<br>0.20 : 真値 | a<br>30.00 : 真値 | 10年 確 率<br>210.43 : 真 値 | 20年 確 率<br>243.29 : 真 値 |
|-----------------|----------------------|-------------------------|-----------------|-------------------------|-------------------------|
| 最 尤 法           | 2.01 ( 0.10)         | 0.20 ( 0.04)            | 25.61 (28.59)   | 210.45 (10.17)          | 243.60 (15.39)          |
| 最小二乗法 (Hazen)   | 2.02 ( 0.10)         | 0.20 ( 0.04)            | 22.42 (31.30)   | 211.17 (10.21)          | 244.26 (15.37)          |
| 最小二乗法 (Weibull) | 2.03 ( 0.10)         | 0.20 ( 0.04)            | 20.96 (30.90)   | 214.60 (10.65)          | 249.26 (16.20)          |
| 積率法 (標本歪係数)     | 2.12 ( 0.14)         | 0.16 ( 0.05)            | -7.61 (49.60)   | 210.38 (10.43)          | 240.81 (15.84)          |
| 積率法 (不偏歪係数)     | 2.11 ( 0.14)         | 0.17 ( 0.05)            | -5.55 (48.81)   | 210.31 (10.40)          | 240.86 (15.80)          |
| 積率法 (B.R.歪係数)   | 2.06 ( 0.18)         | 0.19 ( 0.07)            | 8.12 (48.61)    | 209.14 ( 9.98)          | 240.63 (14.92)          |
| 石原・高瀬の方法        | 2.05 ( 0.16)         | 0.19 ( 0.06)            | 11.37 (47.47)   | 209.06 ( 9.74)          | 240.66 (14.89)          |
| 岩 井 改 良 法       | 2.06 ( 0.09)         | 0.18 ( 0.03)            | 12.63 (25.64)   | 209.20 ( 9.65)          | 239.84 (13.78)          |
| S e x t i l e 法 | 2.01 ( 0.12)         | 0.21 ( 0.05)            | 21.94 (35.78)   | 213.57 ( 9.85)          | 248.90 (15.23)          |

母数 $\mu_y, \sigma_y, a$ の値は、それぞれ 2.0, 0.2, 30.0 とした。これは大阪の年最大降水量(1889~1980年)に LN-3分布をあてはめたときの最尤解に近い値である。発生させた 100個のデータセットそれぞれに対する標本歪係数の平均値は1.26, 標準偏差は0.53, 最大値は4.42, 最小値は0.33であった (N=100の場合)。

5. 結果と考察 表-1にM=100, N=100のときの母数推定値と確率水文学およびその推定誤差を示した。母数推定値の偏倚および推定誤差の小さいものは、最尤法および最小二乗法である。積率法はB.R.の式で歪係数を補正してやれば、 $\mu_y, \sigma_y$ の推定値はかなり改善される。岩井改良法は積率法より良い母数推定値を得るが、最尤法や最小二乗法よりは劣る。10, 20年確率水文学について比較すると、最尤法による偏倚はかなり小さく、推定誤差も比較的小さい。表-2は、データセット数を一定 (M=100) にしてデータ数Nの値を変化させたとき、100年確率水文学の推定値と推定誤差がどのように推移するかを示したものである。どの推定法も概して、データ数の増加に伴って推定誤差は減少し、推定値は徐々に真値に近付く傾向がある。また、N=10, 20のとき、最尤法や最小二乗法の推定値および推定誤差が著しく大きくなった。これはここで用いた最適化手法を小標本に強引に適用したことによる。このような検討の結果、以下のことがわかった。(1) 50個程度以上のデータ数が得られるときは最尤法が良い。(2) データ数が30個程度以下のときは、積率法 (B.R.歪), 石原・高瀬の方法, 岩井改良法が比較的良好な結果を与える。従来わが国で慣用されてきたこれらの方法の小標本での有用性を示している。(3) 最小二乗法では、Hazen 公式を用いるのがよく、その場合、Nが大きいとき最尤法より若干劣る程度である。(4) Sextile 法は全般的に良い結果を与えない。

表-2 データ数Nと 100年確率水文学の推定値および推定誤差の関係  
( 上段: 推定値, 下段: 推定誤差, M=100, 真値=321.92 )

| 母数推定法              | N = 10               | N = 20             | N = 30             | N = 50            | N = 70            | N = 100           | N = 200           | N = 500            | N = 1000           |
|--------------------|----------------------|--------------------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 最 尤 法              | 11037.85<br>(81023.) | 351.22<br>(102.48) | 333.47<br>( 81.41) | 324.20<br>(53.58) | 327.99<br>(43.88) | 323.79<br>(32.86) | 322.46<br>(23.12) | 322.96<br>( 14.58) | 322.71<br>( 9.45)  |
| 最小二乗法<br>( Hazen ) | 397.57<br>(205.70)   | 350.67<br>( 95.72) | 332.20<br>( 75.68) | 326.27<br>(51.48) | 328.19<br>(42.85) | 323.92<br>(32.51) | 322.21<br>(22.82) | 322.79<br>( 14.63) | 322.54<br>( 9.51)  |
| 最小二乗法<br>(Weibull) | 524.32<br>(392.63)   | 396.53<br>(125.29) | 360.40<br>( 91.31) | 342.83<br>(58.23) | 341.15<br>(46.77) | 333.09<br>(34.66) | 327.13<br>(23.61) | 324.92<br>( 14.83) | 323.62<br>( 9.56)  |
| 積 率 法<br>(標本歪)     | 301.26<br>(103.69)   | 313.28<br>( 76.71) | 306.91<br>( 63.47) | 309.74<br>(48.65) | 313.12<br>(42.61) | 311.51<br>(34.86) | 314.90<br>(26.92) | 319.74<br>( 19.48) | 320.75<br>( 12.75) |
| 積 率 法<br>(不偏歪)     | 304.09<br>(105.41)   | 314.59<br>( 77.43) | 308.09<br>( 63.87) | 310.75<br>(48.88) | 313.87<br>(42.75) | 312.03<br>(34.94) | 315.17<br>(26.96) | 319.85<br>( 19.48) | 320.81<br>( 12.75) |
| 積 率 法<br>(B.R.歪)   | 319.56<br>( 98.20)   | 326.57<br>( 79.05) | 319.52<br>( 68.59) | 318.15<br>(50.56) | 319.85<br>(44.79) | 316.23<br>(36.45) | 317.68<br>(28.04) | 321.20<br>( 19.96) | 321.67<br>( 12.91) |
| 石原・高瀬              | 309.83<br>( 81.73)   | 319.73<br>( 71.44) | 318.29<br>( 67.71) | 316.96<br>(48.44) | 319.05<br>(41.44) | 316.37<br>(34.79) | 318.37<br>(27.34) | 321.84<br>( 19.59) | 322.50<br>( 13.20) |
| 岩井改良法              | 328.49<br>(111.10)   | 323.17<br>( 75.48) | 313.24<br>( 56.81) | 309.79<br>(47.30) | 313.27<br>(36.81) | 311.50<br>(27.02) | 312.13<br>(19.18) | 312.42<br>( 11.84) | 312.82<br>( 8.14)  |
| Sextile 法          | 542.90<br>(165.97)   | 431.36<br>(101.65) | 321.20<br>( 70.05) | 353.04<br>(54.86) | 344.16<br>(43.69) | 335.33<br>(34.92) | 329.29<br>(24.06) | 325.11<br>( 15.44) | 323.58<br>( 10.12) |

【参考文献】1) たとえば、神田・藤田：水文学－確率論的手法とその応用－，技報堂，1982，p. 35.

2) 竹内・土屋・伊達：Sextile 法とPWM 法による三母数対数正規分布の母数推定，第14回関東支部年次研究発表会講演概要集，1987，pp. 60-61.