

上流差分を用いた時間的変化の急な流れに関する数値解析

京都大学工学部 正員 岩佐 義朗
東京電力 正員 松岡 聡

西松建設 正員 多田 彰秀
大阪府 正員 森田 優

1. はじめに；本研究は、不連続部を有する時間的変化の急な流れの数値解析において、従来より問題となっている波先部後方に発生する数値振動の抑制を目的として、陰的に人工粘性効果を内在する上流差分を適用した数値解析法（以下、UPW法と呼ぶ）を提案する。ついで、水理実験の再現計算を行うとともに、二次内挿を導入した特性曲線法（CH2法）及びLeap-frog法（LF法）による計算結果との比較を行い、その有効性について検討する。

2. 基礎式及び差分式；一次元運動量解析法を適用すれば、基礎式は次の連続式と運動量式によって構成される。なお、横流入流量 $q=0$ 、運動量係数 $\beta=1$ とする。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vQ) + \lambda' g \cos \theta \frac{\partial}{\partial x}(R_g A) = g A (S_0 - S_f) \quad \text{----- (2)}$$

ここで、 A :断面積、 Q :流量、 h_0 :水面から流水断面図心までの深さ、 λ' :圧力分布係数、 $sr = n^2 Q^2 / (A^3 R_g^2)$:摩擦勾配、 n :Manningの粗度係数、 $sa = \sin \theta$ である。人工粘性効果を内在する上流差分を運動量方程式の移流項の差分に適用すれば次式が導かれる。CH2法及びLF法の差分式については、文献1), 2)に従う。

$$A_i^{n+1} = A_i^{n-1} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (Q_{i+1/2}^n - Q_{i-1/2}^n) \quad \text{----- (3)}$$

$$Q_{i-1/2}^{n+1} = Q_{i-1/2}^{n-1} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \{ (vQ)_{i+1}^n - (vQ)_i^n \} - \lambda' g \cos \theta \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \{ (R_g A)_{i+1}^n - (R_g A)_i^n \} + g \Delta t \frac{A_i^n - A_{i+1}^n}{2} (S_0 - S_f) \quad \text{----- (4)}$$

ここで、 $(vQ)_i$, $(vQ)_{i+1}$ を決定するにあたって、次のようなVD, VM, VUを定義している。

$$VD = Q_{i-1/2}^{n-1} / A_{i-1/2}^n, \quad Q_{i-1/2}^{n-1} \geq 0 \text{ のとき } a=0, \quad Q_{i-1/2}^{n-1} < 0 \text{ のとき } a=1$$

$VM = Q_{i-1/2}^{n-1} / A_{i-1/2}^n$, $VU = Q_{i+1/2}^{n-1} / A_{i+1/2}^n$ とし、 b 及び c についてもVDの a と同様に定められる。さらに、これらを用いて $(vQ)_i$, $(vQ)_{i+1}$ を定義すれば次式のようにになる。なお、 $(R_g A)_i = (A_i^2) / 2B$, $(R_g A)_{i+1} = (A_{i+1}^2) / 2B$ (B :水路幅)である。

$$(vQ)_i = (VD + VM) / 2 \times Q_{i-1/2}^{n-1}$$

$$(vQ)_{i+1} = (VM + VU) / 2 \times Q_{i+1/2}^{n-1}$$

$$(VD + VM) / 2 \geq 0 \text{ のとき } d=0$$

$$(VD + VM) / 2 < 0 \text{ のとき } d=1$$

$$(VM + VU) / 2 \geq 0 \text{ のとき } e=0$$

$$(VM + VU) / 2 < 0 \text{ のとき } e=1$$

3. 数値解析結果とその考察；

平均水路床勾配1/800, 初期流量4~5 l/sで、不連続部が下流から上流へ遡上する実験を行い、UPW法を適用して再現計算を行った。図-1は、その結果を示す水位ハイドログラフである($\Delta x=0.1\text{m}$, $\Delta t=0.002\text{秒}$)。不連続部

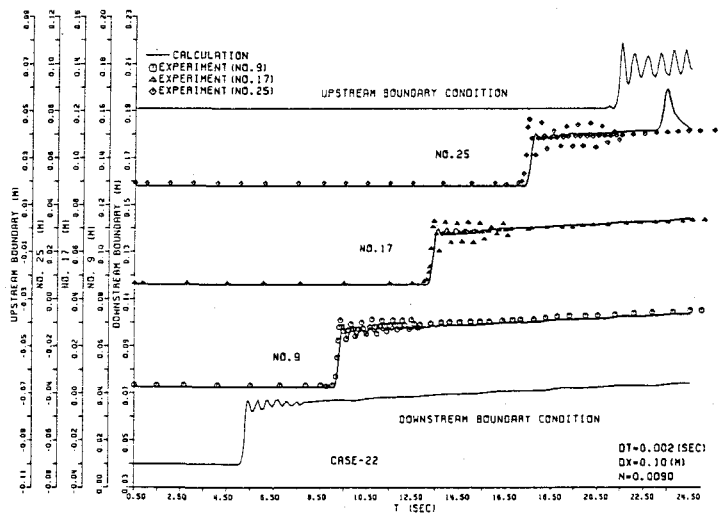


図-1 水理実験と数値シミュレーションとの比較

後方に数値振動が現れているが、振幅、周期及び振幅の継続時間は小さく、水理実験の再現度は非常に

Yoshiaki IWASA, Akihide TADA, Satoshi MATSUOKA, Masaru MORITA

良い。なお、この計算では、境界条件として上流端、下流端に実験より得られた水位ハイドログラフを与え、初期条件は下流端での初期水位と初期流量より不等流計算を用いて設定した。図-2(a),(b),(c)は、それぞれNo.9, No.17, No.25地点での不連続部分を拡大したものである。実験値(●), UPW法による計算値(実線)、LF法による計算値(波線)、CH2法による計算値(一点鎖線)が比較されている。LF法及びCH2法による計算結果では、従来より問題と

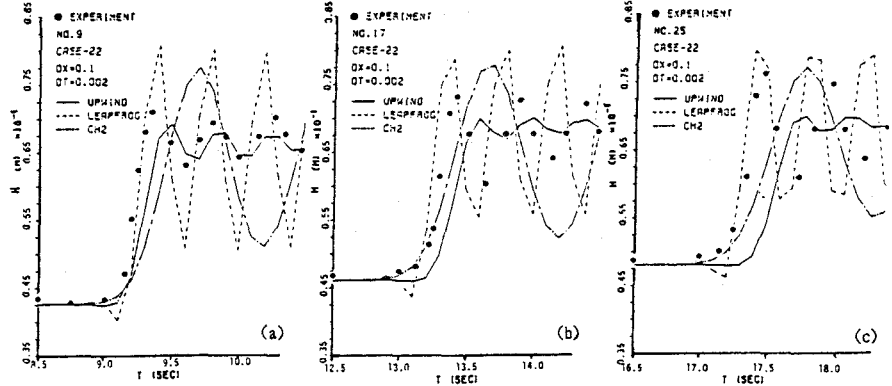


図-2 UPW法, CH2法, LF法及び実験値との比較

なっている数値振動が不連続部後方に生じている。一方、UPW法では、数値振動が存在するものの、他の2つの方法と比較すれば、振幅は極めて小さくその周期も短いことが確認される。これは、UPW法のみが陰的な人工粘性効果を内在するために、波先部の数値振動が抑制されたものと考えられる。しかし、この粘性効果の影響で、波先部での水位変化率になまりが生じていることも確認される。図-3は、UPW法において Δt を一定にした時の Δx の計算結果に及ぼす影響を検討したものである。 Δx の値が小さくなるにともない、波先部での水位変化率は増大していく傾向にある。これより、UPW法でも Δx のとり方によって波先部での水位変化率は再現可能と考えられる。図-4は不連続部が上流から下流へ流下する6ケースについて、UPW法を用いて求められたNo.17 地点の伝播速度 C_s と初期フルード数の関係をプロットしたものである。図中の実線は、次式より求められる理想段波の伝播速度 V_m を h_1/h_0 をパラメータとして示したものである。

$$\frac{V_m}{\sqrt{g h_0 \cos \theta}} = \frac{V_0}{\sqrt{g h_0 \cos \theta}} + \sqrt{\frac{1}{2} \frac{h_1}{h_0} \left(\frac{h_1}{h_0} + 1 \right)} \quad (5)$$

計算結果より求まる C_s は、 h_1/h_0 及び(5)式を用いて求まる V_m よりも、約10%程度小さくなっている。従って、 V_m に何らかの定数を乗じることにより C_s を近似的に求めることが可能であると考えられる。

4. おわりに； 上流差分を移流項の差分に適用した数値解析法は、本研究で対象とする時間的変化の急な流れに対して十分な有効性を有していることが判明した。参考文献；1) 岩佐, 多田; 京都大学防災研究所年報, 第28号B-2, 1985, PP. 429~441, 2) 岩佐, 多田, 松岡; 土木学会関西支部年次講演会, II-37, 1986。

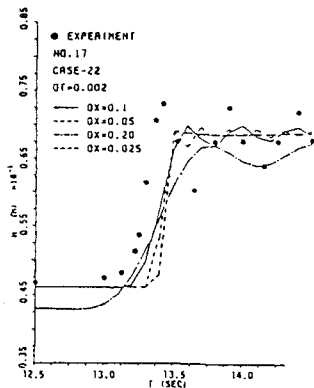


図-3 Δx の違いによる影響

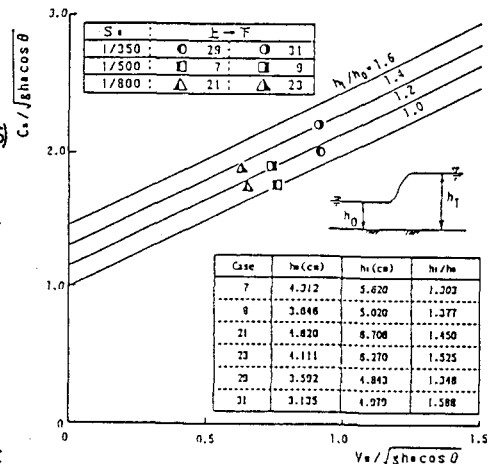


図-4 伝播速度と初期フルード数の関係 (水路中央部)