

一般曲線座標系による開水路流れの平面二次元解析

京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗 京都大学工学部 正 員 綾 史郎
熊 谷 組 正 員 西内 美宣 京都大学大学院 学生員○馬場 寿人

1.はじめに；本研究は、複雑な地形形状を有する水域の流れと水質混合特性を解析することを目的として一般曲線座標系を用いた平面2次元解析モデルの開発を行い、数値解析的研究を行おうとするものである。本報では、平面2次元流れの運動量方程式、連続式及び移流分散方程式からなる数学モデルを一般曲線座標系上で記述するとともに、その離散式について示した。さらに、いくつかの簡単なモデル水域にそれらを適用して、数値解析を実行することにより、数学モデル、計算コードの適切性について検討した。

2. 基礎方程式系およびその離散化；

(1) 基礎方程式系; 本研究で対象とする流れは、 x_3 軸 (鉛直) 方向に水理量の変化の小さい、一様な密度の流れである。通常のデカルト座標系における 3 次元の Reynolds 方程式、乱流拡散方程式を水深積分し、平面 2 次元流れにおける基礎方程式系を得た後、これを一般曲線座標系

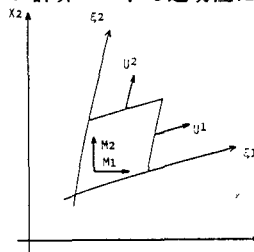


Fig.1 2つの座標系と変数の定義

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2), \quad \xi_2 = \xi_2(x_1, x_2) \quad (1)$$

上のそれに改めると、以下の式を得る。¹⁾

$$\frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{1}{J} \right) \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ Z \\ N \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{1}{J} \right) \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \ell \\ N \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\frac{1}{J} \right) \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \ell \\ N \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left(\frac{1}{J} \right) \begin{pmatrix} Z''/P \\ Z''/P \\ 0 \\ S^1 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left(\frac{1}{J} \right) \begin{pmatrix} Z''/P \\ Z''/P \\ 0 \\ S^2 \end{pmatrix} - \frac{q_h}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{J} \begin{pmatrix} Z_{h1}/P \\ Z_{h2}/P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここに、 M_i : x_i 軸方向の運動量束 ($= \int_{\tau_{bi}}^{\tau_{ti}} u_i dx_i$)、 ξ : 水位、 z_b : 水路床高さ、 h : 水深 ($= \xi - z_b$)、 U_i : 水深平均流速 ($= M_i/h$)、 N : 質量束 ($= \int_{\tau_{bi}}^{\tau_{ti}} c dx_i$)、 τ_{bi} : 水路床における x_i 軸方向のせん断応力、 J : 座標変換に関する Transformation Jacobian である。また、 U^i : 水深平均流速の反変ベクトル成分であって、

$$(3)$$

$$U_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} U_j \quad (i, j = 1, 2)$$

で定義され、 τ_{ij} , S_i^j は、それぞれ x_i 軸方向の (渦動粘性 + 分散) 応力、勾配輸送型 (乱流拡散 + 移流分散) 質量フラックスを示しており、次式で定義される。

$$\begin{bmatrix} \tau^{11}, \tau^{12} \\ \tau^{21}, \tau^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \tilde{f}_1 / \partial x_1, \tau_{11} + \partial \tilde{f}_1 / \partial x_2, \tau_{12}, \partial \tilde{f}_2 / \partial x_1, \tau_{11} + \partial \tilde{f}_2 / \partial x_2, \tau_{12} \\ \partial \tilde{f}_1 / \partial x_1, \tau_{21} + \partial \tilde{f}_1 / \partial x_2, \tau_{22}, \partial \tilde{f}_2 / \partial x_1, \tau_{21} + \partial \tilde{f}_2 / \partial x_2, \tau_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

なお、(2)第1, 第2式は、各々 x_1 , x_2 軸方向の運動量束 M_1 , M_2 に関する運動量方程式であり、第3式は、連続式、第4式は、拡散量の保存を示す移流分散方程式である。なお、(2)式において ξ_1 - ξ_2 座標系は、必ずしも直交する必要はない。

(2) 離散式の誘導：離散式は、(2)を ξ_1 - ξ_2 座標系上において積分することによって求められる。局所的時間変化項については、 ξ_1 - ξ_2 座標系上において積分した後、Adams-Bashforth法により、時間2次精度の離散式を得る。移流項については、2次精度風上差分法(Donor Cell法)あるいは、武本ら²⁾による3次精度風上差分法(QUICK法)を用いる。渦動粘性項、分散項については、面積積分した後、積分境界

Yoshiaki Iwasa, Shirou Aya, Yoshinori Nishiuchi, Hisato Baba

上での τ^{ij} , S_i を各々(4),(5)により、中心差分の考え方により求める。圧力項については、Staggered S-schemeにより離散化する。また、底面せん断力の評価には、Manning型の抵抗則を用いる。

3. 数値実験結果とその考察；(1) 移流分散方程式の数値解析；Fig.2に示されるような、平均流速 U_0 の一様流速、一様水深の流れ場を対象として、原点 P_0 において拡散物質が定常的に投入されるような濃度場における濃度分布を数値解析し、境界条件を一定として時間発展を行うことにより定常解を求めた。計算領域は、同図中に示される物理面上で長方形の領域とし、領域を不規則な格子網で分割した。上流側の境界条件としては、解析解³⁾を与え、側岸部、下流側境界では、 $\partial C / \partial \xi_1 = 0$ or $\partial C / \partial \xi_2 = 0$ を与えた。得られた数値解を、解析解とともに比較して示したものが、Fig.3である。移流項に2次精度の風上差分法を用いた結果が解析解に比較してピーク濃度が約10%程度低くなるとともに、歪んだ濃度分布になるのに対し、QUICK法によるそれは、ほぼ、解析解と一致しており、極めて高精度な数値解が得られた。Donor Cell法による解が歪んだ原因は、 U_0 の流向と座標軸 ξ_1 - ξ_2 の方向が一致していないため、数値分散効果が出現しやすくなったことによるものと考えられる。この解析例より、本研究で示した数値解法は、一般曲線座標系による非正方形格子において十分正確な数値解を与えることがわかる。

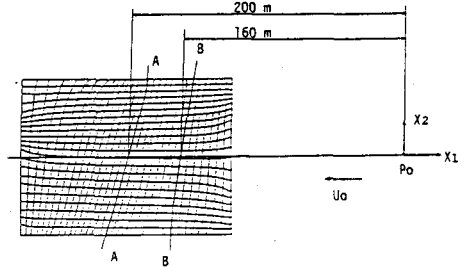


Fig.2 濃度場の解析に用いた座標系と格子網

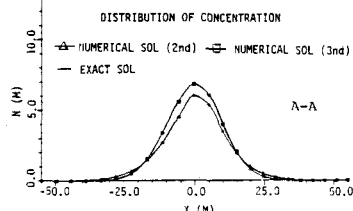


Fig.3 数値解と解析解の比較

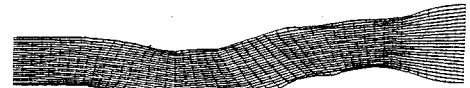


Fig.4 モデル湾曲河道と不規則格子網

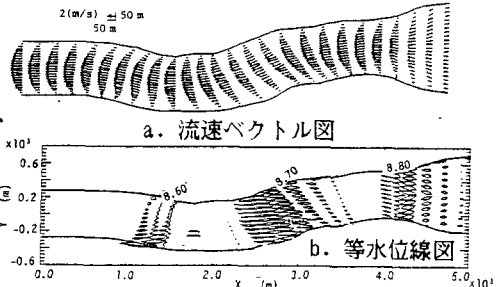


Fig.5 流れ場の数値計算結果

4. おわりに；本報文中で示した方法により、一般曲線座標系による非正方形格子網を用いた数値解析法について、その具体的手法と有用性について指針を得ることができた。境界条件の選定法、離散化手法の改善、格子網の生成法の改善を図り、実水域における流れと、拡散の解析への適用が今後の課題である。

《参考文献》(1) 岩佐、綾、土屋、井上：関西支部年次学術講演会, 1987。(2) Takemoto et al : Trans. JSIDE, No.121, 1987。(3) Hinze, J.O : Turbulence, 2nd edition. McGraw-Hill, 1975.