確率論的評価規範に基づく最適アクティブダンパーについて

京都大学工学部　正 員　山田 善一　家村 浩和
京都大学大学院　学生員　○五十嵐 晃

1．はじめに　最近、構造物の振動の抑制のために、アクティブコントロールの適用が検討されるようになっている。本稿では、確率過程としてモデル化された地動入力に対して、確率論的な規範の意味で最適な制御の構成法に関して考察した結果について述べる。

2．定式化　地動 $z(t)$ のもとで、制御力 $u(t)$（m次元ベクトル）を受けるn自由度系の運動方程式

$$M\ddot{y}+C\dot{y}+Ky=-\underline{m}\ddot{z}+Du \qquad (\ D : n\times m\text{行列}\ )$$

は、次のような状態方程式で表現することができる。

$$\dot{x}=Ax+Bu+G\ddot{z}$$

ただし、$x^T=(y^T \quad \dot{y}^T)$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}D \end{pmatrix} \quad G=\begin{Bmatrix} 0 \\ -M^{-1}\underline{m} \end{Bmatrix}$$

ここで、$\ddot{z}(t)$ を定常確率過程とする。定常応答状態において次のような確率論的評価規範を満たすような制御力 $u(t)$ を考える。

$$J=E\left[\frac{1}{2}\dot{y}^TM\dot{y}+\frac{1}{2}y^TKy+\sum_{i=1}^{m}r_iu_i^2\right]\rightarrow \min. \qquad (\ r_i>0\ )$$

すなわち、構造物の振動エネルギー（運動エネルギー＋ひずみエネルギー）の期待値と、各制御力の分散の重み付き和を最小とするようなものを求める。概念図をFig.1 に示す。考えうるすべての制御は斜線部より上の領域に存在する。そのうち、この規範に基づく制御は、例えば同一の分散を持つ制御力の中で振動エネルギー期待値を最小にするものである、という意味で最適である。上式は次のようにも書ける。

$$J=E\left[x^TR_1x+u^TR_2u\right]\rightarrow \min.$$

ただし、
$$R_1=\frac{1}{2}\mathrm{blockdiag}(K,\ M)$$
$$R_2=\mathrm{diag}(r_1,r_2,\cdots,r_m)$$

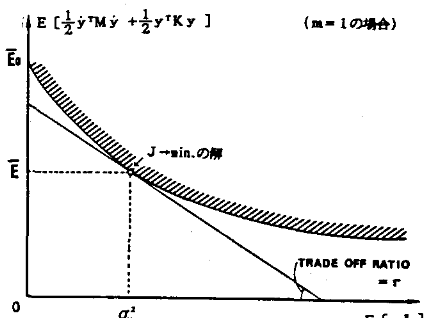

Fig.1

3．ホワイトノイズ加速度地動入力に対する最適制御則　制御力 $u(t)$ を状態フィードバック

$$u(t)=Fx(t) \qquad (\ F : m\times 2n\text{行列}\ )$$

の形式で与えると仮定する。$\ddot{z}$ が定常なホワイトノイズ過程であるとしたとき、次のような行列代数方程式

$$PA+A^TP+PBR_2^{-1}B^TP+R_1=0 \qquad (\text{ Riccati 方程式})$$

の正定対称解 P（$2n\times 2n$行列）を用いて

$$F=-R_2^{-1}B^TP$$

とすれば、Jを最小にすることを示すことができる。なお、一般に正規ホワイトノイズ入力の場合の最適制御則が、入力のない場合の

$$J'=\int_0^{\infty}(x^TR_1x+u^TR_2u)\,dt \rightarrow \min.$$

を満たすような最適制御則（このような定式化はしばしば行われる）と一致することは、最適レギュレータの理論として知られている[1)]。

4．卓越振動数を持つ地動入力に対する最適制御則　地動変位 $z(t)$ が、正規ホワイトノイズ加振を受ける1自由度振動系の応答としてモデル化されると仮定する。このとき、地動加速度のパワースペクトルは、

Yoshikazu YAMADA , Hirokazu IEMURA ,Akira IGARASHI

$$P(\omega)=\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^4}{\left\{\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2-1\right\}^2+4\zeta_g{}^2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}V_0$$

ω_g は卓越振動数であり、ζ_g によって卓越の度合を表わすことができる。このような地動 $z(t)$ のもとでJを最小とする最適な制御力は、前節の手法の応用によって、状態フィードバック（閉ループ）による制御力に、地動によって算出されるフィードフォーワードの部分を加えたものになるという結果が得られる。

$$u(t)=F_x\,x(t)+F_z\,\underline{z}(t) \qquad (F_x:m\times 2n\text{行列、}F_z:m\times 2\text{行列})$$

ただし、$\underline{z}=(z(t)\ \ \dot{z}(t))^T$

①F_x の算出法　前節で示したFと同一である。（ω_g、ζ_g によらず一定）

②F_z の算出法　F_x を算出したときの Riccati方程式の解Pを用いて、4n元の連立1次方程式

$$\begin{pmatrix}(A+BF_x)^T & -\omega_g{}^2 I\\ I & (A+BF_x)^T-2\zeta_g\omega_g I\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\pi_1\\ \pi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\omega_g{}^2PG\\ 2\zeta_g\omega_g PG\end{Bmatrix}$$

を解く。その解 π_1、π_2（それぞれ2n次元の列ベクトル）を用いて、

$$F_z=-R_2{}^{-1}B^T(\pi_1\quad\pi_2)$$

5. 数値計算例

$\omega_g=6.0$(rad/sec), $\zeta_g=0.05$に相当する模擬地動を作成し、Fig.2 に示す1自由度系にこの地動が入力された場合の応答を計算した。制御を行なわない場合、状態フィードバックのみによる制御を行なった場合、そして地動フィードフォーワードを追加した場合の3ケースを比較したものを、Fig.3 に示す。ただし、重み係数は比較が容易なように調整してある。

制御を行なった場合の応答が、制御なしの場合に比べて減少していることは当然であるが、地動フィードフォーワードを追加した制御は、フィードバックのみによる制御に比べて、その振動の抑制のレベルはほぼ同一であるが、その際用いた制御力は小さいもので済んでいることがわかる。このことは、もし両者の方式で同程度の制御力を使用した場合には、フィードフォーワードを使用した制御の方が、より大きな制振効果を得ることができることを意味するものである。

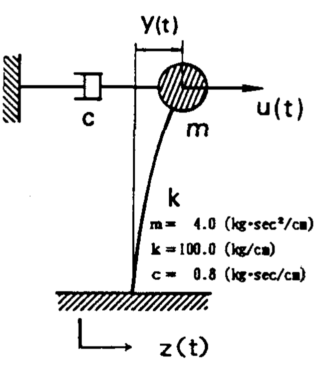

Fig.2

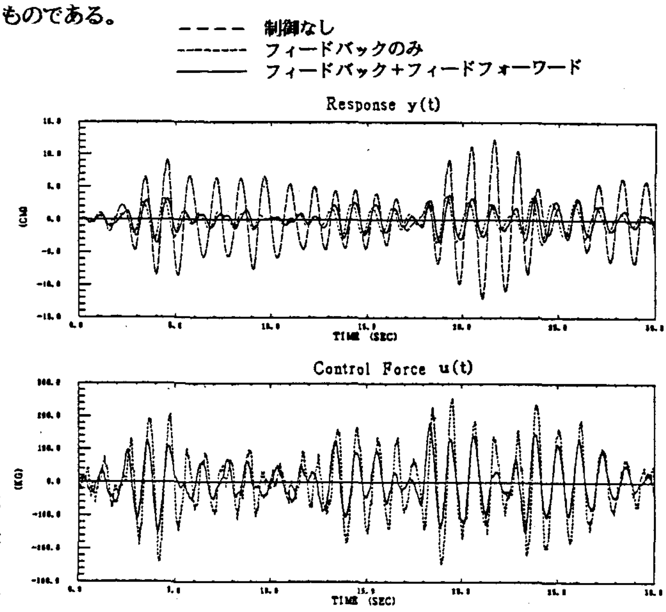

Fig.3

6. あとがき

実地震記録を用いた計算も試みたが、かなり良好な結果が得られている。予測される入力の特性が事前に適切に評価できるかどうかが重要な点であると考えられる。

参考文献 1) H.Kwakernaak and R.Sivan : Linear Optimal Control Systems, Wiley Interscience, 1972.