

衝撃荷重を受ける平面梁内の応力波伝播について

大阪市立大学 小林 治俊 (正員), ○奥田 東吾 (学生員), 園田恵一郎 (正員)

【1】まえがき 本研究は、衝撃荷重を受ける両端単純支持梁の応力波伝播特性を明らかにする事を目的とし、梁を平面応力問題として取り扱い、二次元動弾性論に基づき固有関数展開法を用いて解析を行ったものである。

【2】解析方法 平面梁の座標系を図1に示す。平面応力問題の釣合方程式は式(1)で与えられる。

$$G [\nabla^2 \mathbf{U} + \beta \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{U})] = \rho d^2 \mathbf{U} / dt^2 \quad (1)$$

ここに $\mathbf{U}(u, v)$ = 変位ベクトル; $\beta = (1 + \nu)/(1 - \nu)$; ν = ポアソン比; G = せん断弾性係数; ρ = 密度; t = 時間。境界条件は、 $x=0, l$ で単純支持 ($v = \sigma_x = 0$)、上下辺 ($y = \pm h/2$) で自由 ($\sigma_y = \tau_{xy} = 0$)。

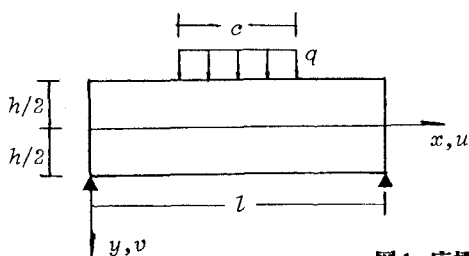


図1. 座標系

式(1)の解は次式の様に置く事が出来る。(1.2)

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \mathbf{U}^s(x, y, t) + \sum \sum Q_{mn}(t) \mathbf{U}_{mn}(x, y) \quad (2)$$

上式中、 $\mathbf{U}_{mn}[u_{mn}(x, y), v_{mn}(x, y)]$ は固有関数⁽¹⁾、 $\mathbf{U}^s$ は準静的問題の解⁽²⁾で各々次式を満足する。

$$G [\nabla^2 \mathbf{U}_{mn} + \beta \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{U}_{mn})] = -\rho p_{mn}^2 \mathbf{U}_{mn}$$

$$G [\nabla^2 \mathbf{U}^s + \beta \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{U}^s)] = 0 \quad (3)$$

ここに、 p_{mn} は固有円振動数。式(2)を式(1)に代入し、式(3)及び固有関数の直交性を利用すれば、未定の時間関数 $Q_{mn}(t)$ に関する微分方程式を得る：

$$d^2 Q_{mn} / dt^2 + p_{mn}^2 Q_{mn} = F_{mn}(t) / N_{mn} \quad (4)$$

$$F_{mn}(t) = - \int_V (d^2 \mathbf{U}^s / dt^2) \mathbf{U}_{mn} dV$$

$$N_{mn} = \int_V (u_{mn}^2 + v_{mn}^2) dV \quad (V: \text{体積})$$

式(4)の解は周知の Duhamel 積分で表される。

【3】数値計算例 梁上辺にステップ状の衝撃荷重 q (中央載荷、幅 c) が作用する場合を、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、梁高/スパン比 $h/l = 0.3$ として数値計算を行った。載荷前の梁は静止しているとした。

図2に中央点 ($x = l/2, y = 0$) の σ_y の初期応答曲線を3種類の載荷幅 ($C/l = 0.1, 0.2, 0.4$) に対して示した。横軸は無次元時間 $\tau [= t/(h/C_1)]$ を表しており、 $C_1 = \sqrt{2G/\rho(1-\nu)}$ は縦波の速度である。図中 $C/l = 0.4$ の場合で①～⑧印を付した応答は、応力波の典型的な伝播様相を示すため記したもので、これらは梁上辺で発生した応力波が同図に示した経路で着目点に到達する時刻での応答に対応する。Ps, Pc は各々縦波、横波 (速度 $C_2 = \sqrt{G/\rho}$) を意味し、この二つの応力波が存在するため境界で入射波は二つの反射波 Ps, Pc となり、反射後着目点に到達する応力波の種類は $C_1 > C_2$ である速度の違いに依存する。この事例を応力波経路⑥⑦⑧に見る事が出来る。経路①⑤に対応する応答はパルス状であり、初期の応答に引張応力が見られる事は興味深い。

図3は中央断面 ($x = l/2$) において着目点を変えた場合の σ_y の応答を載荷幅 $C/l = 0.4$ の場合に対して表したものである。

以上、数値計算において採用した級数の項数は x, y 方向に各々 $m=120, n=500$ である。しかし衝撃を受けた後、応力波が到達する前には応力が零となるべき時間領域や応力波経路①⑤に対応する応答値には若干の誤差を含んでいる。これは、本固有関数展開法による時間方向の級数の収束性によるが、これらの応答を除けば図2で明らかにした様に各応力波経路に対する応答時刻を確実に捕らえており十分に満足 of いく結果が得られている。

【4】参考文献

1. 奥田・小林・園田: 37 回応用力学連合講演概要集
2. Reismann, H.: Appl. Sci. Res., Vol. 18, 1967
3. 長谷川久夫: 機械学会論文集, 41 巻, 1975

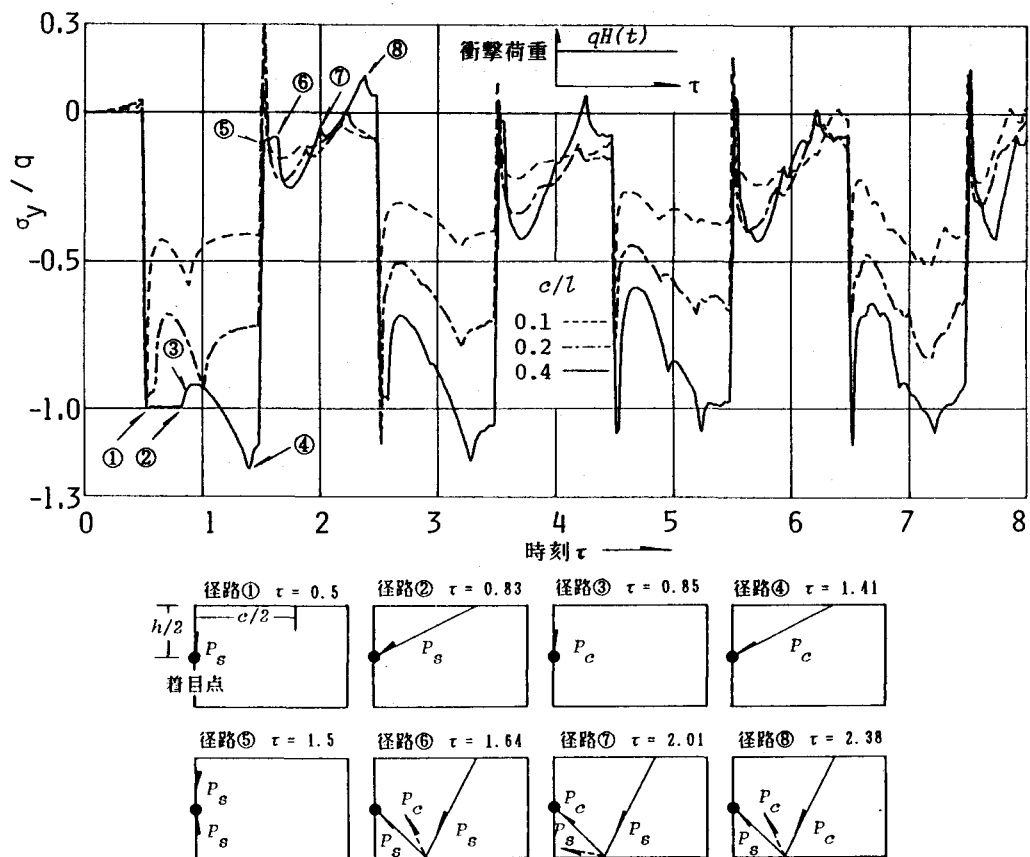


図2. 中央点($x=l/2, y=0$)における σ_y の応答曲線と応力波の径路

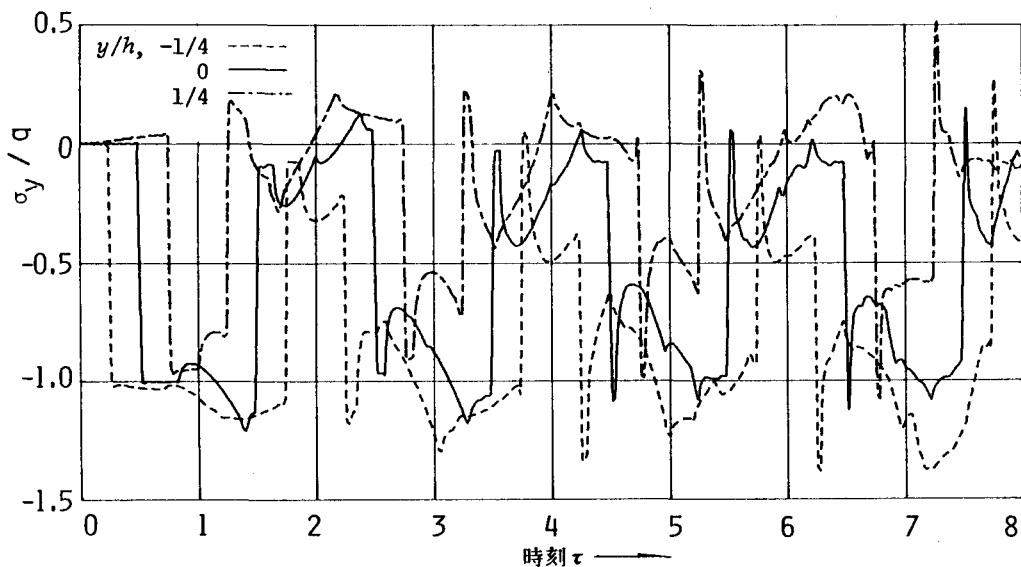


図3. 中央断面($x=l/2$)における σ_y の応答曲線