

積分方程式法による軸対称弾性体の3次元波動散乱問題

近畿日本鉄道 正員○宗藤洋

岡山大学工学部 正員 廣瀬壮一

京都大学大学院 学生員 伊藤弘之

1. はじめに

実際の地盤や岩盤は複雑な材料特性を有するが巨視的には弾性体と近似できる場合が多く、また地中の構造物も近似的に空洞周囲とは異なる弾性体あるいは流体と見なせる。従って、地震時における地盤の応答解析は、半無限弾性体中に空洞あるいは周囲と異質の弾性体または流体が存在するモデルを考え、その境界上の変形および応力状態を解析することに帰着される。そこで本研究は、空洞を有する無限あるいは半無限軸対称弾性体に、鉛直下方から平面波P波が入射したときの3次元動的特性を境界積分方程式法を用いて解析する。特に定式化においては、取り扱う物理量を弾性体子午線上に集約し、積分核、(二重層核)における静弾性項を楕円積分で評価することにより、3次元解析の簡易化を図った。また、離散的に得られた空洞境界上の変位をスプライン関数で補間することにより、境界上の縁応力を求めた。

2. 座標系

領域 D_0 中に直交座標系 (x_1, x_2, x_3) を取り x_3 軸について軸対称な等方・均質の弾性体を考える。本研究では問題を取り扱い易くするために、Fig.1に示すような円筒座標系を考える。小文字と大文字の添字はそれぞれ直交座標成分と円筒座標成分を表すことにする。また以下では、

$$\text{点}\underline{x} (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (r, \theta, z)$$

$$\text{点}\underline{y} (y_1, y_2, y_3) \rightarrow (\eta, \phi, \xi)$$

と対応させることにする。点 $\underline{x}$ 、 $\underline{y}$ は軸対称弾性体の子午線上の点を表すこととし、それぞれ (r, z) 、 (η, ξ) 面内の点を表す。

3. 定式化

ここでは、軸対称な空洞を有する無限弾性体に軸の真下方向よりP波が入射する問題についてBEM法による定式化を行う。周波数領域における支配方程式を動弾性問題の基本解を用いて領域積分を行い、

Gaussの発散定理を作用させた後、極限操作を行い空洞境界上では表面力が存在しないという境界条件を代入すると以下の式を得る。

$$\frac{1}{2}\delta_{ji}u_i(\underline{x}) = u_j^m(\underline{x}) - \int_{S_0} T_j^i(\underline{x}, \underline{y}) u_i(\underline{y}) dS_y \quad (1)$$

ここで $T_j^i(\underline{x}, \underline{y})$ は動弾性問題の二重層核を、 $u_j^m(\underline{x})$ は点 $\underline{x}$ における入射波による変位ベクトルを表す。ここで、 δ_{ji} はkroneckerのデルタを表す。

$$Q_{ij}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で表せる変換マトリックスを用いて直交座標系から円筒座標系へ座標変換を行うと

$$\frac{1}{2}\delta_{ji}u_i(\underline{x}) = u_j^m(\underline{x}) - \int_{S_0} Q_{ji}(\theta) T_j^i(\underline{x}, \underline{y}) Q_{ir}(\phi) dS_y \quad (2)$$

となる。式(2)点 $\underline{y}$ に関する面積分は周方向の回転軸による積分と子午線上 $(\theta=0)$ の線積分に分離することができるから式(2)は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta_{ji}u_i(\underline{x}) &= u_j^m(\underline{x}) \\ &- \int_{S_0} u_r^m(\eta) \gamma \int_0^{2\pi} Q_{ji}(\theta) T_j^i(\underline{x}, \underline{y}) Q_{ir}(\phi) d\phi dS_y \quad (3) \end{aligned}$$

となる。式(3)の軸対称問題の二重層核を静弾性問題の二重層核 $\hat{T}_j^i(\underline{x}, \underline{y})$ とそれ以外の項に分離すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta_{ji}u_i(\underline{x}) &= u_j^m(\underline{x}) \\ &- \left[\int_{S_0} u_r^m(\eta) \gamma \int_0^{2\pi} \hat{T}_j^i(\underline{x}, \underline{y}) d\phi dS_y \right. \\ &\left. + \int_{S_0} u_r^m(\eta) \gamma \int_0^{2\pi} \tilde{T}_j^i(\underline{x}, \underline{y}) Q_{ir}(\phi) d\phi dS_y \right] \quad (4) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\bar{T}_j^i(x,y) = Q_{ji}(\phi) \bar{T}_j^i(x,y) Q_{ji}(\phi)$
 $\bar{T}_j^i(x,y) = T_j^i(x,y) - \bar{T}_j^i(x,y)$ を表す。
 式(4)が解くべきBEMである。

軸対称空間を有する半無限弾性体における問題に
 対しても、同様の定式化により解くことにする。

4. 積分核の評価

式(4)の積分核 $\bar{T}_j^i(x,y)$ は陽に求めることができ
 あり、また特異性を持たないので、 $\bar{T}_j^i(x,y)$ を含む
 積分項は、子午線 ∂S と同方向の線積分を計算する
 ことにより評価する。線積分はGaussの8点積
 分を用いることにする。積分核 $\bar{T}_j^i(x,y)$ は $1/R$ と z
 方向導関数で表すことができるが、この $1/R$ は同円
 筒座標系において

$$1/R = I(0,0,0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I(k,k,0) \cos k(\theta - \phi) \quad (5)$$

と表すことができる。ここに

$$I(\mu, \nu, \lambda) = \int_0^{\pi} \exp\{-i\lambda z\} J_{\mu}(sv) J_{\nu}(s\eta) S^2 dS \quad (6)$$

で表せる積分はLipschitz-Hankel型の積分と呼ばれ
 ているものである。この型の積分は漸化式や微分関
 係式より、任意の次数の $I(\mu, \mu, \lambda)$ ($\lambda=0,1,2$)を
 完全楕円積分として表すことができる。よって積分
 核 $\bar{T}_j^i(x,y)$ を含む項は $\eta \int_0^{\pi} \bar{T}_j^i(x,y) d\phi$ をまず楕円積
 分で表し、子午線 ∂S 上の線積分を計算することに
 より評価する。計算の詳細は当日発表する。

5. 数値解析例

半径 a の球空洞を含む無限あるいは半無限領域に軸
 の真下方向よりP波が入射する問題について数値解
 析を行った。ここで行う数値解析は一定要素による
 近似法を採用し、選点法を適用した。Fig.2,3は無
 限弾性体中に球空洞が存在する場合の球空洞上の変
 位の解析結果をPao & Mowの解析結果と比較し
 たものであり、本解析法の妥当性を確かめることが
 できた。なお、半無限弾性体における解析結果そ
 の他詳細は当日発表する。

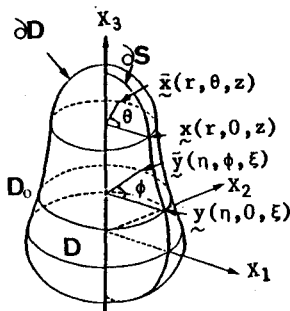


Fig.1 座標系

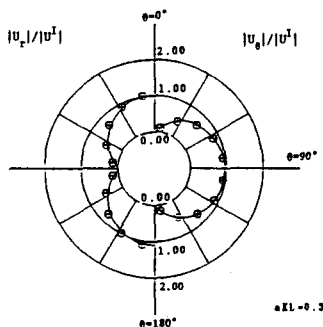


Fig.2 球空洞上の変位 $akL=0.3$

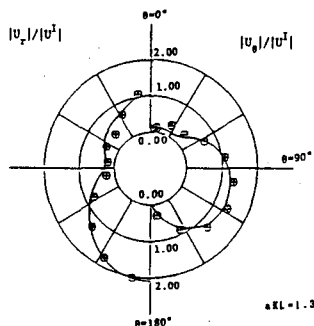


Fig.3 球空洞上の変位 $akL=1.3$

参考文献

1. Eason, G., Noble, B. and Sneddon, I. N.: On Certain Integral of Lipschitz-Hankel Type Involving Product of Bessel Functions, Phil. Trans. R. Soc. London, A247, pp. 529-551, 1955.
2. 北川康孝・福井卓雄: 境界要素法による軸対称弾性体の非軸対称問題の解析, 境界要素法論文第2巻, 境界要素法研究会, 1985年8月