積分方程式法による種々のクラック問題の解析

京都大学工学部　（正）　西村直志
同　　　　　　　　　　　小林昭一

1　序

積分方程式法は特異性を有する場の解析法として有用であり、特にクラック問題に有効である。とりわけ二重層ポテンシャルを用いる解析は、物理的にも自然であり、有望である。ただし、得られる積分方程式は Hypersingular な核を有し、数値解析に於いては特異性の低下を図る必要がある。本報では、３次元定常動弾性問題に於いて、この特異性を可積分オーダーに下げる方法を示し、次に時間域積分方程式法によって二層弾性体の界面クラックを扱う場合の同様な工夫について述べる。最後にランニングクラックについての同様な解法について述べる。

2　３次元定常動弾性

３次元定常動弾性学のクラック問題は、R^3に於ける滑らかな縁のある曲面Sについて

$$\mathrm{div}\, C[\nabla u] + \rho\omega^2 u = 0 \qquad \text{in} \quad R^3\setminus S \tag{1}$$

$$Tu^{\pm} = C[\nabla u]^{\pm} n = 0 \qquad \text{on } S \tag{2}$$

$$\lim_{x\to x^0} [u(x)] := \lim_{x\to x^0} (u^+(x) - u^-(x)) = 0 \qquad x\in S,\ x^0 \in \partial S \tag{3}$$

及び $u\text{-}u_I$ に関する放射条件を満たす解 u を求める事に帰着される。ここに u は変位、C は弾性常数、ρは密度、ωは周波数、u_I は入射波である。(1) の基本解Γを用いれば、この問題の解は

$$u(x) = u_I(x) + \int_S \Gamma'_I(x,y)\phi(y)dS, \quad \Gamma'_{ijl}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y_k}\Gamma_{ij}(x,y)C_{lkim}n_m(y) \tag{4,5}$$

なる２重層表示を有し、(2) より積分方程式

$$0 = Tu_I + \mathrm{pf}\int_S T\Gamma_I \phi\, dS \qquad \text{on } S \tag{6}$$

が得られる。ここに pf は有限部分である。ところが $C_{abip}\ \partial/\partial x_p\ \ \partial/\partial y_q \Gamma_{ij}(x,y)C_{cdjq}$ は (a,b), (c,d) について Γ から計算される応力の (a,b), (c,d) 成分を意味するから、ω=0 の場合には応力関数を有する事になり、$\omega\neq 0$ に於いても表示

$$C_{abip}\frac{\partial}{\partial x_p} C_{cdjq}\frac{\partial}{\partial y_q}\Gamma_{ij}(x,y) = e_{aip}e_{bjq}e_{ckr}e_{dls}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_l}\Phi_{pqrs}(x-y)$$
$$+ \Psi_{abcd}(x-y) + D_{abcd}\delta(x-y) \tag{7}$$

を有する事が示される。ここに、Φは応力関数であり、$|x-y| \to 0$ に於いて $O(|x-y|)$ となる。また

N. Nishimura & S. Kobayashi

Ψは高々可積分な特異性を示す関数である。(7) の表示に一意性はないが、等方性の場合や２次元問題では、Φ、Ψを陽に書き下すことができる。(7) を用いれば (6) は

$$-(Tu_i)_a(x) = -\int_S (n_b(x)-n_b(y)) e_{aip} e_{biq} e_{dls} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_l} \Phi_{pqrs}(n_c e_{ckr} \phi_{d,k}) dS$$

$$- pf \int_S e_{aip} e_{dls} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_l} \Phi_{pqrs} n_b e_{biq} \frac{\partial}{\partial y_j} (n_c e_{ckr} \phi_{d,k}) dS$$

$$+ \int_S n_b(x) \Psi_{abcd} n_c(y) \phi_d dS \qquad (8)$$

と書かれる。右辺２項目の pf はϕの２階微分によるもので、核自身はすべて可積分である。一方pf 積分も簡単な変形により普通の積分で表示出来るので、結局 (6) は正則化された事になる [1] 。

3　２層弾性体の界面クラックの時間域に於ける解析（図１参照）

２層弾性体の面外変形は (1) に於て $\rho\omega^2 u$ を $-\rho\ddot{u}$ として変形を３成分に限定する事により得られる。このとき (8) に相当する方程式は、

$$Tu_i(x,t) = \int_0^t \int_S \{\Gamma_1(x-y,t-s)\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^2 \phi(y,s) - \Gamma_2(x-y,t-s)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 \phi(y,s)\} ds dy \qquad (9)$$

ここにΓ_1, Γ_2 は、（$t/|x|<s_1$, $s_1<t/|x|<s_2$, $s_2<t/|x|$）に応じて

$$\pi\Gamma_1(x,t) = \left(0,\ \frac{\mu_1\sqrt{(t^2-s_1^2|x|^2)}}{(\mu_1^2-\mu_2^2)t^2-(\mu_1^2 s_1^2-\mu_2^2 s_2^2)|x|^2},\ \frac{1}{A}\right)$$

$$\pi\Gamma_2(x,t) =$$

$$\left(0,\ \frac{\sqrt{(t^2-s_1^2|x|^2)}\{(\mu_1+\mu_2)t^2-\mu_2 s_2^2|x|^2\}}{(\mu_1^2-\mu_2^2)t^2-(\mu_1^2 s_1^2-\mu_2^2 s_2^2)|x|^2},\ \frac{s_2^2\sqrt{(t^2-s_1^2|x|^2)}+s_1^2\sqrt{(t^2-s_2^2|x|^2)}}{A(\sqrt{(t^2-s_1^2|x|^2)}+\sqrt{(t^2-s_2^2|x|^2)})}\right) \qquad (10,11)$$

又、 $A=\mu_1\sqrt{(t^2-s_1^2|x|^2)}+\mu_2\sqrt{(t^2-s_2^2|x|^2)}$、及び $s_i=\sqrt{(\rho_i/\mu_i)}$ であり、$s1<s2$ と仮定した。(9)を用いて時間域の積分方程式法を行うと、やはり核はすべて可積分になる。

4　ランニングクラック

３に於ける解析は、$\mu_1=\mu_2$, $\rho_1=\rho_2$ の場合には通常の時間域の波動方程式のクラック問題の積分方程式法を与える。この場合、クラックは静止している必要はなく、例えば一方の tip が、速度　$v(t)$ ($<\sqrt{(\mu/\rho)}$) で伸長する場合にもそのまま成立する。但しこの場合の積分方程式法に於いては、クラック長の増大に伴って要素数を増加させる工夫をせねばならない。

以上の各解析について数値解析を行ったので、発表当日に数値結果をまとめて示すこととする。

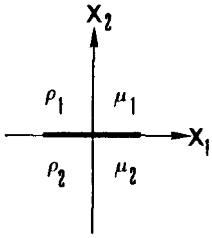

図１

文献

[１] 西村、小林(1987), 境界要素法論文集、４巻、49-54.