積分方程式法による三次元クラックの動的解析

京都大学大学院　学生員　○郭　慶春
京都大学工学部　正　員　西村直志
京都大学工学部　正　員　小林昭一

［１］　まえがき

本論文は，三次元無限等方弾性体中に含まれる有限クラックを対象とし，時間空間域法によって二重層ポテンシャルを含む境界積分方程式を定式化し，更にこれを数値的に解くことによってクラックが入射波に対する動的挙動（開口変位と応力拡大係数）を求めるものである。

［２］　クラック問題

ＳをR³にある有限大きさを持つ滑らかな曲面とする。また領域R³/ＳをＤとすると，クラック問題は次の式を満たす変位場$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$を求めることに帰着される。

① 支配方程式：$D\times(0,\infty)$において，　$\mathrm{div}C(\nabla\boldsymbol{u})=\rho\ddot{\boldsymbol{u}}$　(1)

（C:弾性定数テンソル，ρ:密度）

② 境界条件：　$S\times(0,\infty)$において，　$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}T\boldsymbol{u}=0$　(2)

（$\boldsymbol{x}_0\in S$）

③ 初期条件：　Dにおいてt=0の時，　$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_I$，$\dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{u}}_I$　(3)

（$\boldsymbol{u}_I$：入射波，支配方程式を満たす）

④ 放射条件：　$|\boldsymbol{x}|\geq ct+d$　において，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_I$　(4)

（c:波速，d:正の定数）

ただし，式(2)のオペレータＴは次のように定義する（$\boldsymbol{n}$:単位法線ベクトル）。

$$T\boldsymbol{u}=C(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} \tag{5}$$

［３］　境界積分方程式の定式化

よく知られている様に，上に示した問題の解$\boldsymbol{u}$は次式の様な二重層表示を有する。

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{u}_I(\boldsymbol{x},t)+\int_0^t\int_S\Gamma_I(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s)\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{y},s)\,dS_y\,ds \tag{6}$$

ここに，$\boldsymbol{\phi}$は開口変位で，Γ_Iは次式によって定義される二重層核である。

$$\Gamma_{Iki}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s)=C_{insj}\frac{\partial\Gamma_{ks}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s)}{\partial y_j}n_n(\boldsymbol{y}) \tag{7}$$

また$\Gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s)$は基本解，即ち次式を満たす２階のテンソルである。

$$C_{ijkl}\Gamma_{mk,jl}-\rho\frac{\partial^2\Gamma_{mi}}{\partial t^2}=-\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta(t-s)\delta_{im} \tag{8}$$

式(6)の両辺にＴをかけ，$\boldsymbol{x}$をＳに近づける極限操作を行い，更に境界条件に注意すると，次の境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned}0=T_{pk}u_{Ik}(\boldsymbol{x},t)&-e_{tkr}e_{vut}C_{pqir}C_{jkmn}n_q(\boldsymbol{x})\ vp\int_0^t\int_S n_v(\boldsymbol{y})\frac{\partial\Gamma_{im}}{\partial x_n}\frac{\partial\phi_j}{\partial y_u}dS_y\,ds\\&-C_{pqir}n_q(\boldsymbol{x})\int_0^t\int_S\Gamma_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s)n_r(\boldsymbol{y})\frac{\partial^2\phi_j}{\partial s^2}dS_y\,ds\end{aligned} \tag{9}$$

ただし，式(9)のΓと$\boldsymbol{\phi}$のアーギュメントはそれぞれ$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t-s)$と$(\boldsymbol{y},s)$である。またｖｐとｅはそれぞれコーシーの主値と交代記号を表す。

Qing-Chun GUO　　Naoshi NISHIMURA　　Shoichi KOBAYASHI

［4］ 離散化

正方形クラックS＝$\{\underset{\sim}{x} \mid |x_1|\leqq a,\ |x_2|\leqq a,\ x_3=0\}$を例にして説明する。クラックをN×N個の要素に等分割し，一要素の長さを$\Delta x=2a/N$で表す。また時間の一ステップの長さをΔtとする。時刻$s_2=k\Delta t$にクラックのℓ番目要素S_ℓ($y_{11}\leqq y_1\leqq y_{12},\ y_{21}\leqq y_2\leqq y_{22}$とする)における開口変位$\phi_i$を

$$\phi_i(\underset{\sim}{y},k\Delta t)=\sqrt{(a^2-y_1^2)(a^2-y_2^2)}\ \phi^i_{k\ell} \qquad (10)$$

$$(\underset{\sim}{y}\in S_\ell,\ \phi^i_{k\ell}:\text{定数})$$

と仮定し，各時間ステップ内では時間と線形関係であるとする。このような離散化によってtip($y_1,y_2=\pm a$)の近傍の開口変位はtipからの距離の平方根に比例していることに注意されたい。

［5］ 解法手順

式(10)を積分方程式(9)に代入し，同時にソースポイント$\underset{\sim}{x}$をそれぞれの要素の中心点にすると$\phi^i_{k\ell}$に関する連立一次方程式系を得る。これらの方程式の$\phi^i_{k\ell}$に関する係数を求めるために，

$$\phi_i(\underset{\sim}{y},s)=\{H(y_1-y_{11})-H(y_1-y_{12})\}\{H(y_2-y_{21})-H(y_2-y_{22})\}\frac{\phi^i_{k\ell}}{\Delta t}\sqrt{(a^2-y_1^2)(a^2-y_2^2)}\ \times \qquad (11)$$

$$\times\Big\{\big(H(s-s_1)-H(s-s_2)\big)(s-s_1)-\big(H(s-s_2)-H(s-s_3)\big)(s-s_3)\Big\} \qquad \begin{pmatrix} s_1=(k-1)\Delta t \\ s_3=(k+1)\Delta t \end{pmatrix}$$

を式(9)の積分に代入し，時間方向に$s_1\sim s_3$，クラック方向にS_ℓの領域で積分計算を行えばいい。ここにHはステップ関数である。

ステップk(k=1,2,…)での具体的な計算法は次の通りである。式(9)において$t=k\Delta t$とし，上の離散化によって得られた連立一次方程式に初期条件と先に求めた$\phi^i_{1\ell}\sim\phi^i_{k-1,\ell}$(ただし，k=1のときは初期条件のみ)を代入して$\phi^i_{k\ell}$($i=1,2,3,\ \ell=1,2,\cdots N^2$)を求めればいい。k=1から出発して上の計算法を繰り返すと，必要な時刻までの開口変位$\underset{\sim}{\phi}$を求めることができる。tip近傍の開口変位の結果によって応力拡大係数も容易に求められる。なお、積分の数値計算はGaussの積分公式(必要に応じて変数変換及びアイソパラメトリック要素も使う)によって計算できるが，これらの詳細については省略する。

［6］ 計算例

応力P_0を生じる過渡のP波がクラックと直行方向から通っていく場合について，上述の方法によって求められたtipの真中における応力拡大係数K_I及びクラックの中線における開口変位ϕ_3の結果はそれぞれ図1と図2に示している。図1にはItouの解(文献)も合わせて示している。この計算ではN=10,$\Delta t=\Delta x/c_T$(c_T:S波の波速),またポアソン比$\nu=0.2$とした。20ステップまで計算するのに京都大学大型計算機センターのM780による計算時間は約87秒である。

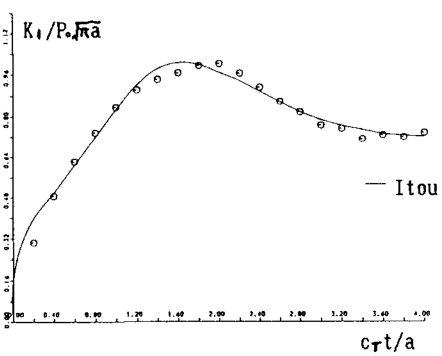

図1．応力拡大係数K_I

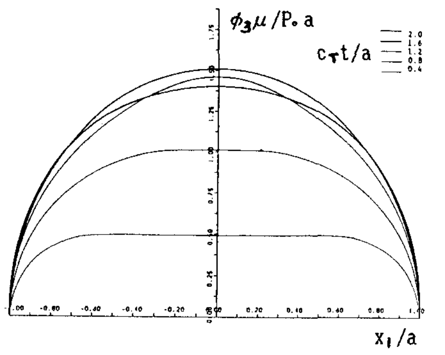

図2．開口変位ϕ_3

参考文献: S.Itou(1980) J. Appl. Mech., vol.47 , pp.958