土構造物のSHAKEDOWN解析

京都大学工学部　正会員　小林昭一
京都大学工学部　正会員　田村　武
神　戸　市　正会員　○手塚亮介

1．はじめに　本研究は土構造物が繰り返し荷重をうける場合の安全性の解析を極限荷重と弾性限界荷重の応力空間において行なうものである。Shakedown の定義は繰り返し荷重をうけはじめに塑性変形するも最終的に弾性応答のみになるような場合を shakedown すると定義する。またそのときの荷重強度は定義より明らかに極限荷重強度と弾性限界荷重強度の中間の値をとることになる。この荷重強度を Shakedown の上界法(Koiter の定理から求めるのを主眼とする。

2．Shakedown 理論　Koiter の定理を解くためにいくつかの基本概念を説明する。まず admissible plastic strain rate cycle という概念を説明する。これは(1)の中の $\dot{\varepsilon}''_{ij0}$ で表わされるものでそれ自身は必ずしも適合条件を満足しないが荷重1サイクルの周期Tまで積分すれば適合条件を満足するという性質をもつものである。次に残留応力という概念を説明する。これは前述の $\dot{\varepsilon}''_{ij0}$ が適合条件を満足しないから適合条件を満足させるための応力(速度) $\dot{\rho}_{ij}$ を考える必要がある。これを残留応力といい(2)で定義される。またこの残留応力から弾性定数を介して決まる $\dot{\varepsilon}_{ijR}$ と前述の $\dot{\varepsilon}'_{ij0}$ との和が(3)の中の $\dot{u}_{i0}$ と適合条件を満足する。最後に(3)で注意すべきことは左辺の k はある1つの $\dot{\varepsilon}''_{ij0}$ に対して1つ決まり上界法にのっとっていることから(3)で求まる k の値を最小にすることを主眼としていることである。また右辺の $D(\dot{\varepsilon}_{ij0})$ はエネルギー消散率で $\dot{\varepsilon}''_{ij0}$ と normality rule をみたす応力 σ_{ij} との積 $D(\dot{\varepsilon}''_{ij})=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}''_{ij0}$ である。(3)の X_i T_i は与えられた外力である。

$$\Delta\varepsilon''_{ij0} = \int_0^T \dot{\varepsilon}''_{ij0}\,dt \qquad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(e)} + \rho_{ij} \qquad (2)$$

σ_{ij}：実際の応力．　$\sigma_{ij}^{(e)}$：弾性体と仮定した時の応力．　ρ_{ij}：残留応力．

$$k\int_0^T dt\left\{\int X_i\dot{u}_{i0}\,dV + \int_{S_p} T_i\dot{u}_{i0}\,ds\right\} = \int_0^T dt\int D(\dot{\varepsilon}_{ij0})\,dV \qquad (3)$$

3．Shakedown の定式化

(3)を定式化すると(4)のように表示できる。ここでそれぞれの式の意味であるが(4.1)は2から明らか。(4.2)は外力仕事を1とする式である。(4.3)はひずみの関係式で $\dot{\varepsilon}_{ije}$ は(4.2)の $\dot{u}_{i0}$ と適合条件を満足する。$\dot{\varepsilon}_{ij0}$ は塑性ひずみ速度。$\dot{\varepsilon}_{ijr}$ は残留ひずみ速度。(4.3)は(4.2)と(1)の $\Delta\varepsilon''_{ij0}$ が適合条件式を満足することからでてくる関係式である。

$$\left.\begin{array}{lll}
 & \int_0^T dt\int D(\dot{\varepsilon}_{ij0})\,dV \rightarrow \min & (4.1)\\
\text{sub to} & \dot{\varepsilon}_{ij0} + \dot{\varepsilon}_{ijr} = \dot{\varepsilon}_{ije} & (4.2)\\
 & \int_0^T \dot{\varepsilon}_{ijr}\,dt = 0 & (4.3)\\
 & \dot{\varepsilon}_{RR0} = 0 & (4.4)\\
 & \dot{\rho}_{ij,j} = 0 \quad (\text{in } V) & (4.5)\\
 & \rho_{ij}n_j = 0 \quad (\text{on } S_p) & (4.6)
\end{array}\right\} \quad (4)$$

S. Kobayashi　　T. Tamura　　R. Tezuka

(4.4)はvon Misesの降伏条件から求まる非圧縮条件である。(4.5)(4.6)は残留応力が自己平衡系をなす条件である。次に時間積分を除くためにいくつかの仮定をする。Fig-1の応力経路においてA.B部分においてのみ集中的に塑性変形が生じるとすると外力及び変形はA.B点においてのそれと同一と仮定できる。それと(4.3)(4.4)からA,B点での塑性ひずみ増分について(5.1)(5.2)が成立する。また残留応力が自己平衡系をなすことと仮想仕事の式を利用すれば(5.3)が成立する。以上のことから定式化は(6)のようになり求める範関数は(7)のようになる。これをNewton-Raphson法による逐次代入計算で解くのである。

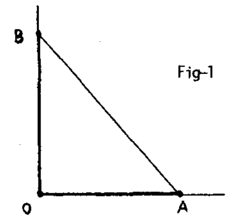

Fig-1

$$\Delta \varepsilon_{ij_o}^{A} = \Delta \varepsilon_{ij_c}^{A} - \Delta \varepsilon_{ijr} \qquad (5.1)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij_o}^{B} = \Delta \varepsilon_{ij_c}^{B} + \Delta \varepsilon_{ijr} \qquad (5.2)$$

$$\int \rho_{ij} \varepsilon_{ijr} \, dV = 0 \qquad (5.3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int D(\varepsilon_{ij_o}^{A})\,dV + \int D(\varepsilon_{ij_o}^{B})\,dV \rightarrow \min. \\ &\Delta \varepsilon_{ij_o}^{A} = \Delta \varepsilon_{ij_c}^{A} - \Delta \varepsilon_{ijr} \\ &\Delta \varepsilon_{ij_o}^{B} = \Delta \varepsilon_{ij_c}^{B} + \Delta \varepsilon_{ijr} \\ &\text{Sub to} \quad \mathbb{F}_A^{T} \boldsymbol{u}^{A} + \mathbb{F}_B^{T} \boldsymbol{u}^{B} = 1 \\ &\qquad L\,\boldsymbol{u}^{A} - \int \boldsymbol{\varepsilon}_{RR_o}^{R}\,dV = 0 \\ &\qquad L\,\boldsymbol{u}^{B} + \int \boldsymbol{\varepsilon}_{RR_o}^{R}\,dV = 0 \\ &\qquad \int B^{T} D Q^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{R}\,dV = 0 \end{aligned}} \qquad (6)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Pi = &\int D(\boldsymbol{\varepsilon}_c^{A} - \boldsymbol{\varepsilon}^{R})\,dV + \int D(\boldsymbol{\varepsilon}_c^{B} + \boldsymbol{\varepsilon}^{R})\,dV + \lambda_A^{T}\left\{L\boldsymbol{u}^{A} - \int \boldsymbol{\varepsilon}_{RR}^{R}\,dV\right\} + \lambda_B^{T}\left\{L\boldsymbol{u}^{B} + \int \boldsymbol{\varepsilon}_{RR}^{R}\,dV\right\} \\ &- \mu\left(\mathbb{F}_A^{T}\boldsymbol{u}^{A} + \mathbb{F}_B^{T}\boldsymbol{u}^{B} - 1\right) + \nu^{T}\int B^{T} D Q^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{R}\,dV \end{aligned}} \qquad (7)$$

4. 数値計算例

適用地盤としてはFig-2のようなものを用い前述のshakedown解析を行ない中心にたて.横の単独荷重がかかった場合の極限荷重とshakedownがおこる場合の荷重の比較を行なった。水平荷重あるいは鉛直荷重のみによる極限荷重はそれぞれ17.6, 15.4(厳密には単位荷重を0.5としているからこの値の½が極限荷重になる。)またshakedown荷重は13.5となり1.で述べた通り.この値はたて.横どちらの極限値より小さな値をとっていることがわかる。

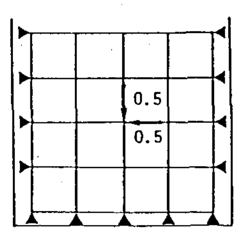

Fig-2

参考文献 i) Korter.W.T. : General Theorems For Elastic-Plastic Solids, (Progress in Solid Mechanics, CH, Ⅱ), North-Holand. 1964
ii) 手場宣行:「土構造物のshakedown解析」京都大学 修士論文 1987