

積分方程式法による断面形状の最適化

京都大学工学部 正員 小林 昭一
 “ “ 田村 武
 日立製作所 “ 〇隅谷 典孝

はじめに

最適設計において、断面形状の最適化は基本的かつ重要な課題である。今回は、その簡単な例として、断面積一定の条件下でねじり剛性を最大にするような断面形状の最適化を取上げた。ねじり理論そのものについては、既によく知られているので、ここでは、最適化について、具体的な計算方法等を述べ、いくつかの例題についての計算結果を示すことにした。ただし、紙面の節約上、応力関数(歪 (α, β))による記述のみとする。

ねじり剛性最大化(断面形状最適化)の計算

本研究ではねじり剛性そのものを逐次計算するのではなく、ねじり剛性が最大となった時に満たされる条件(必要条件)を計算することにより最適化を行っている。この場合、断面積一定の下でねじり剛性を最大にするということから、次のLagrange関数を考える。

$$L = \mu D - \lambda \int ds = \int_s \left(\mu \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \right) - \lambda ds \quad (1)$$

μD : ねじり剛性, λ : Lagrange乗数

ここで、断面形状最適化ということで、境界変動を伴う変分問題を考える。(1)式の関数に対する第2変分は、通常の第1変分と、被積分関数を重みとした境界上の面積変化の和となる。前者はねじりの基礎式を満たすとき0になるので、面積一定条件; $\int \delta x ds = 0$ の下で、満足されなければならない条件は次の式で表わされる。

$$\mu \int \left(\frac{\partial \alpha}{\partial n} \right) \delta x d\Gamma = \lambda \int \delta x d\Gamma \quad (2)$$

δx : 境界変動量, $\frac{\partial}{\partial n}$: 法線方向微分

さて、具体的にどのような計算をするかであるが、ここで考える断面形状は、 $n(n \geq 3)$ 個の頂点により決まる多角形(図-1等参照)とする。各頂点の位置を表わす変数(X_i とする)について、最適値が得られれば、最適形状が求まったことになる。(2)式の積分は、図-1に示される量を用いて計算する。ここで、 $\frac{\partial \alpha}{\partial n}$ は積分方程式法を解けば直接求まる量である。頂点 X_i の両側の边上における各 δx の大きさは、 δX_i を与えれば、

比例配分的に求まるので、(2)式は、 $F_i \delta X_i = \lambda G_i \delta X_i$ あるいは $\delta X_i = 1$ とすれば、 $F_i = \lambda G_i$ (3)と表わせる。 F_i, G_i は断面形状が決まれば、決まる。これと断面積一定条件 $S = S_0$...

(4) から、 $X_{i opt}, \lambda_{opt}$ が求められる。ただし、この場合、問題がこれら未知数について非線形であるので、未知数を $X_i + \delta X_i, \lambda + \delta \lambda$ とおいて、 $\delta X_i, \delta \lambda$ について、逐次計算をしなければならない。式(3), (4)について、未知数を $X_i + \delta X_i$ 等とおいて、 $\delta X_i, \delta \lambda$ について展開すると、

$$\sum_j \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j} - \lambda \frac{\partial G_i}{\partial X_j} \right) \delta X_j - G_i \delta \lambda = -(F_i - \lambda G_i) \quad (5)$$

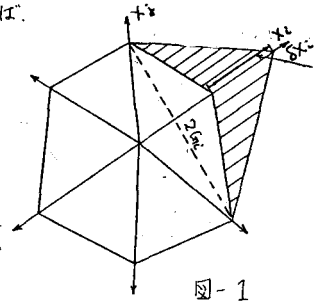


図-1

Kobayashi, Shoichi, Tamura Takeshi, Sumiya Michitaka

I-53-1

$$\sum_j S_j \delta X_j = S_0 - S \quad (7)$$

となり、 $\delta X_i, \delta \lambda$ に関する連立方程式の偶々あることがわかる。ここで、 $\partial F_i / \partial X_j, \partial G_i / \partial X_j$ を新たに計算しなければならないが、後者については、 $i=j$ の時0.5、 $i \neq j$ で0となることがわかる。 $\partial F_i / \partial X_j$ については、次のようにして求める。図-2を参考に

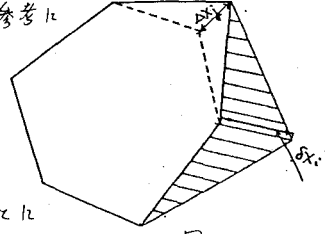


図-2

して、頂点 X_j を δX_j だけ変化させた形状で、ねじり問題を解き得られた解を用いて、 $F_i(\dots, X_j + \delta X_j, \dots)$ を求める。そして、数

$$\text{値微分する} \quad \frac{\partial F_i}{\partial X_j} = \frac{1}{\delta X_j} (F_i(\dots, X_j + \delta X_j, \dots) - F_i(\dots, X_j, \dots))$$

により計算する。これで連立方程式の係数は全て求まったことになり、最適化における方向ベクトル $(\delta X_1, \dots, \delta X_n, \delta \lambda)$ が得られる。 $\delta X_i, \delta \lambda$ について、収束すれば、その時点での X_i が最適解である。

計算例

単連結領域1例、複連結領域3例を示した。複連結領域の方は、孔の形状を固定して外周の形状を計算した。いずれも、細線が初期形状で、太線で示される形状に収束した。図-3, 4の点線による外周形状は、途中経過である。また、各図の点線または実線による×印は、領域内・境界上の要素分割状態を示している。今回の計算では、面要素として4節点アイソパラメトリック要素、線要素として3節点——を用いた。又、収束回数も、各図ごとに“STEP=”として記した。ねじり剛性の値については、今回は追求しない。これらの例は、全て応力関数による計算結果で、各例とも妥当な結果と言える。その関数による計算も行なったが、精度が悪く、収束計算も良くなかった。原因としては、境界積分の精度の低さが考えられる。

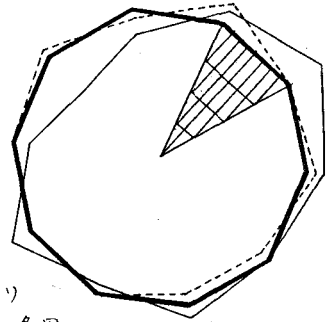


図-3 STEP=4

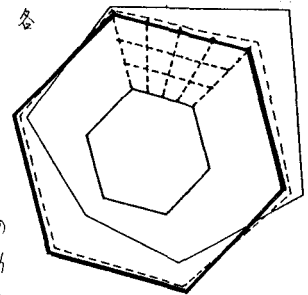


図-4 STEP=6

今後の課題

今回、積分方程式法を利用した理由として、不要な内部量の計算を省くということを考えていたが、良い結果の偶々れた応力関数による計算では、領域内積分を行うので、あまり意味がなかったと言える。従って、今後の改良点としては、境界変動に伴う境界要素の再分割等も含め、積分精度の向上、又、応力関数による領域内積分の工夫(計算量を減くするような)あるいは、逐次計算における、刻み幅の与え方などがあげられる。

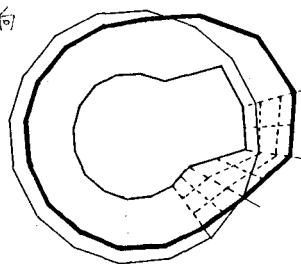


図-6 STEP=12

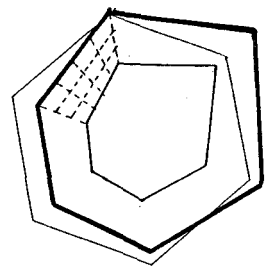


図-5 STEP=6