選点法による変厚板の曲げ解析について

大阪市立大学　正　員　園田恵一郎
同　上　正　員　小林　治俊
同　上　学生員　○小倉　悦郎

【1】まえがき

変厚板の支配方程式は変数を係数とする偏微分方程式となるため，厳密に解くことは容易では無く，限られた問題のみ解析解が求められている．著者等はこれまでに確定特異点を避けたべき級数法[1-3] により板厚が一方向にのみ任意に変化する場合の曲げ，固有値問題の解析を行ってきた．本文は，直交多項式の零点を選点とする内部選点法[4-5] による曲げ解析を試みたものであり，前記べき級数法による結果と比較検討を行った．

【2】解析法

図1に取り扱う矩形板の座標系を示す．境界条件は $x=0,a$ で単純支持，$y=0,b$では任意とし，板厚は x 方向に一定で，y 方向には正則な任意関数 $h(y)=h_0H(y)$ で与えられるものとする．この時，たわみ W の支配方程式は，次式で与えられる．

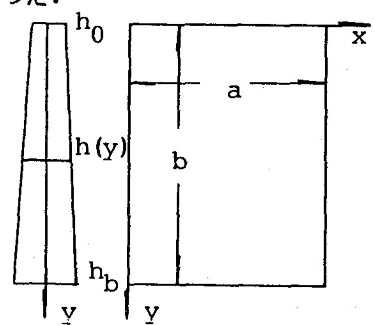

図1　座標系

$$D\Delta\Delta W + 2D'(\Delta W)' + D''[\Delta W + (1-\nu)W''] = q \quad \ldots(1)$$

ここに，$D(y)= D_0H^3(y)$; D_0は $y=0$ における基準板剛度，ν=ポアソン比，Δ=ラプラシアン，q= 荷重強度，$'= d/dy$.

式(1)の解として式(2)を仮定すれば，$Y(\eta)$に関する微分方程式(3)を得る．

$$W = \Sigma\, Y(\eta)\sin(m\pi x/a)\ ;\quad q = q(\eta)\Sigma\, q_m \sin(m\pi x/a) \quad \ldots\ldots.(2)$$

$$A_4Y'''' + A_3Y''' + A_2Y'' + A_1Y' + A_0Y = F(\eta) \quad \ldots\ldots.(3)$$

ここに，

$A_4= H^3$; $A_3= 6H'H^2$; $A_2= -2\alpha^2H^3 + 3H''H^2 + 6(H')^2$; $A_1= -6\alpha^2H'H^2$; $A_0= \alpha^4H^4 - 3\nu\alpha^2[H''H^2 + 2(H')^2H]$; $F= q(\eta)q_mb^4/D_0$; $\eta= y/b$; $' = d/d\eta$; $\alpha= m\pi b/a$ $(m=1,2,3,\ldots)$

さて $Y(\eta)$ の試行関数として，ずらしルジャンドル多項式 $P_n^*(\eta)$ を用いて，式(4)のように置く．

$$Y''''(\eta) = \sum_{n=0\sim(N-1)} C_nP_n^*(\eta) \quad \ldots\ldots.(4)$$

積分を繰り返し $Y'''\sim Y$ を定め，これらを式(3)に代入した後，ずらしルジャンドル多項式の零点を内部選点(N個)として式(3)を離散化する．更に $y=0,b$ における境界条件を用いれば，未定定数 C_n に関する $N+4$ 元連立方程式を得，これを解くことにより解が決定する．

【3】数値計算例

最初に，板剛度，荷重強度ともに y の線形関数で与えられて，　$D_b= 8D_0$，$q_b= 8q_0$　である Olsson の問題[6]の解析結果を表1に示す．選点法，べき級数法ともに波数は　$m=11$ としている．Olsson が与えた積分指数関数による解析解は $m=3$ に対する数値であるため，たわみのみ $m=11$ とした再計算値を載せた．表よりべき級数による値は正解を与えているものと考えられるが，選点法による値は今一歩改善すべき点があるようである．

Keiichiro SONODA, Harutoshi KOBAYASHI and ○ Etsuro OGURA

表1 Olsson の問題 (a=b, ν=0.16) [6]

x=a/2 y/b	w ($4qa^4/\pi^4D_o$)			M_x (qa^2/π^3)			M_y (qa^2/π^3)		
	Collo-cation	Power series[a]	Exact[b]	Collo-cation	Power series	Exact[c]	Collo-cation	Power series	Exact[c]
0.175	0.2045[d]	0.2042	0.2042	0.5365	0.5364	0.5935	0.8364	0.8409	0.8676
	0.2046[e]			0.5387			0.8407		
0.335	0.3058	0.3051	0.3051	1.1143	1.1123	1.2171	1.2522	1.2394	1.2683
	0.3057			1.1027			1.2422		
0.494	0.3248	0.3242	0.3242	1.5285	1.5279	1.6630	1.4334	1.4383	1.4778
	0.3249			1.5262			1.4422		
0.653	0.2752	0.2748	0.2748	1.6009	1.5996	1.7613	1.4738	1.4681	1.5116
	0.2752			1.6049			1.4684		
0.812	0.1702	0.1700	0.1700	1.1884	1.1890	1.3965	1.1891	1.1960	1.2277
	0.1702			1.1916			1.1940		

Note: [a] Ref.[2]; [b] Exponential integral by authors (m=11);
[c] Exponential integral by Olsson (m=3), Ref.[6]; [d] N=8; [e] N=16

表2は板厚が直線変化(h_o=2h_b)する無限片持帯板が点(x=0, y/a=3/4)に集中荷重を受ける場合の結果である．無限帯板の問題はたわみ，荷重をフーリエ積分表示すればよく，式(5) 以降の展開は矩形板の場合と全く同様である．無限積分はシンプソン 1/3則により行い，きざみ幅は 0.05, 積分上限値は 20 とした．また選点数は，載荷点を境にして両領域ともに N=10 としている．たわみは精度良く求められており，曲げモーメントについても載荷線上以外では良好な結が得られている事が分かる．収束性等は講演当日発表する．

表2 板厚が直線変化する変断面無限片持帯板 (ν=0.2)

y/a	w (10^3xPa^3/D_o) x/a=0	1/4	1/2	1	y/a	M_x (—P/10) x/a=0	1/4	1/2	1
1/4	0.19826	0.17522	0.12684	0.04846	0	5.3159	4.6460	3.2598	1.1457
	0.19826	0.17522	0.12684	0.04846		5.3159	4.6460	3.2598	1.1457
2/4	0.77360	0.67606	0.49009	0.19691	1/4	3.1405	2.7785	2.0746	0.9016
	0.77364	0.67609	0.49009	0.19690		3.1411	2.7783	2.0744	0.9017
3/4	1.64698	1.40256	1.01956	0.42672	1/2	1.5705	1.2396	0.9523	0.4957
	1.65079	1.40415	1.01996	0.42634		1.5758	1.2424	0.9523	0.4949
1	2.44615	2.15915	1.60473	0.69258	3/4	-	0.0874	0.0232	0.0129
	2.44627	2.15923	1.60473	0.69255		-	0.0491	0.0145	0.0154

【参考文献】 (1) 小林,園田：変厚矩形板の曲げ・振動・座屈問題の一解析法，第34回応用力学連合講演会，1984. (2) 小林,園田,滝野：変断面無限片持帯板の解析とその影響面の作成，1985年度土木学会年次学術講演会. (3) R.-W. Hwang, H. Kobayashi and K. Sonoda: An analytical method for free vibrations of annular plates with radially varying thickness, Mem. Fac. Osaka City Univ., Vol.26, 1985. (4) 三上,芳村：選点法による回転殻の固有振動数の解析，土木学会論文報告集,第335号，1983. (5) M.Y.T. Chan and S.F. Ng: Solutions of some structural analysis problems by orthogonal collocation, J. Struct. Mech., Vol.5, 1977. (6) S.P. Timoshenko, Plates and shells, McGraw-Hill, 1959.