

弾塑性有限変位を考慮した圧縮板の動的安定性

関西大学工学部 正会員 米澤 博

関西大学工学部 正会員 堂垣正博

日本情報サービス㈱ 正会員○原田匡人

1. まえがき 周期的に変化する面内荷重が長方形板に作用する場合、加振振動数によっては静的座屈荷重よりかなり小さな値で板は不安定となり、動座屈が起きることはよく知られている。この場合、共振によりたわみ振幅が板厚程度あるいはそれ以上になったり、応力が降伏点に達したりする場合が考えられる。周期軸力と加振振動数の関係から板が不安定な振動を起こす領域を固有値解析で定めたり、弾性有限変位の動的応答を解析することはかなりなされているが、材料の降伏をも考慮した研究は比較的少ない。ここでは、幾何学のおよび材料的非線形性を考慮し、周期軸力を受け、初期たわみを有する正方形板の弾塑性有限変位応答を明らかにする。数値解析に差分法と Newmark の β 法を用い、初期たわみ、静的軸力、周期軸力の振幅と周期が正方形板の動的挙動に及ぼす影響を調べる。

2. 動的応答の基礎式 Fig. 1 に示す初期たわみ $[w_0 = w_{0\max} \cos(\pi x/a) \cos(\pi y/b)]$ を有する長方形板 [長さ a 、幅 b 、板厚 h] を対象に、 x 方向に周期的に変化する面内強制変位 $u_m = \pm(u_0 + u_t \sin \theta t)$ $[\theta$ は加振円振動数] が作用する場合の非線形動的応答を以下の仮定のもとに明らかにする。すなわち、1) Kirchhoff-

Love の仮定、2) 部材は完全弾塑性体で、ひずみ硬化は考えない、3) 降伏判定は von Mises の等価応力で行い、Ziegler の移動硬化則を用いる、4) 回転慣性、構造減衰は考慮しない。

(1) 弾塑性の運動方程式 長方形板の静的弾塑性有限変位場の x, y, z 方向の力のつり合い式に d'Alembert の原理により慣性項を付加すれば、

$$N_x^e{}_{,x} + N_{xy}^e{}_{,y} - N_x^p{}_{,x} - N_{xy}^p{}_{,y} = \rho h u_{,tt} \quad (1)$$

$$N_{xy}^e{}_{,x} + N_y^e{}_{,y} - N_{xy}^p{}_{,x} - N_y^p{}_{,y} = \rho h v_{,tt} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & M_x^e{}_{,xx} + 2M_{xy}^e{}_{,xy} + M_y^e{}_{,yy} + N_x^e \bar{w}_{,xx} + 2N_{xy}^e \bar{w}_{,xy} + N_y^e \bar{w}_{,yy} \\ & - M_x^p{}_{,xx} - 2M_{xy}^p{}_{,xy} - M_y^p{}_{,yy} - N_x^p \bar{w}_{,xx} - 2N_{xy}^p \bar{w}_{,xy} - N_y^p \bar{w}_{,yy} \\ & + \rho h u_{,tt} \bar{w}_{,x} + \rho h v_{,tt} \bar{w}_{,y} = \rho h w_{,tt} \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。ここに、 u, v はそれぞれ x, y 方向の変位、 $\bar{w}$ は板の全たわみで初期たわみ w_0 と荷重による付加たわみ w の和、 ρ は密度である。 $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$ は膜力、膜せん断力、曲げおよびねじりモーメントである。上添字 e, p 付きの断面力はそれぞれ板が弾塑性状態にある場合に弾性状態を仮定して求められる断面力と、断面の塑性化によって生ずる仮想断面力を示す。仮想断面力は前者から求められる von Mises の等価応力が降

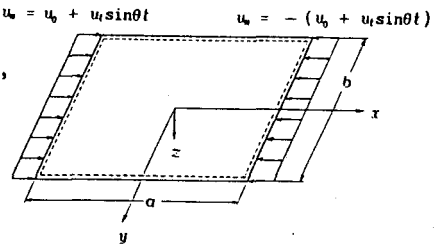


Fig. 1

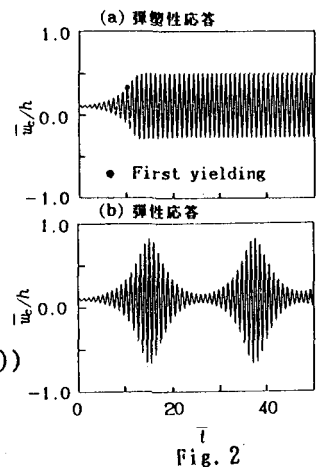
伏点応力を越える場合、その超過応力を板厚方向に数値積分して求められる。また、コンマに続く添字はそれに関する偏微分を表す。

(2) 境界条件 $x=\mp a/2$ で $u_m = \pm(u_0 + u_t \sin \theta t)$ の強制変位が作用し、膜せん断力 $N_{xy}=0$ とする。 $y=\mp b/2$ では $N_y = N_{xy}=0$ とする。また、板は周辺単純支持されている。

3. 数値解析法 部材の塑性化を考慮した基礎運動方程式(1)～(3)の厳密解を境界条件のもとに求めることは極めて困難なため、ここでは差分法と Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) を適用し、近似的に解くことにする。任意の時刻 t に対して得られた非線形多元連立代数方程式を修正 Newton-Raphson 法により残差不平衡力が許容の精度内に収まるまで反復して解く。なお、多元連立一次方程式は三角分解法で解き、演算時間の短縮を図った。また、すべての式を無次元化し、解析結果が広範囲な板に適用可能なようにした。

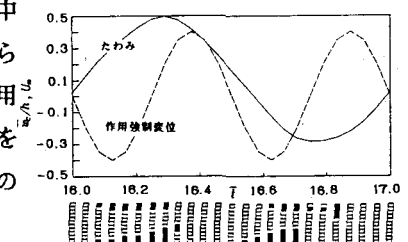
4. 数値解析結果 荷重、境界条件および初期たわみの対称性から $1/4$ の板を解析する。十分な精度の解を得るため、 $1/4$ の板を x, y 方向にそれぞれ 5 分割した。また、板厚方向にも 10 分割し、その方向の塑性域の拡がりを調べた。その結果、静的圧縮力を受ける長方形板の既存の終局強度と本解析結果を比較し、本法は非常に良い結果を与えることがわかった。また、直接時間積分に必要な微小時間間隔 Δt を加振振動周期の $1/12$ とした。なお、降伏点応力 $\sigma_p = 2400 \text{ kgf/cm}^2$ 、Young 率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。

幅厚比 $b/h=40$ 、最大初期たわみ $w_{0\max}/h=0.1$ の正方形板に周期的強制変位 $U_t = 0.4$ (静的耐荷力の 0.41 倍の軸圧縮力に相当する) のみが作用する場合、加振振動数と 1 次固有振動数の比が $\theta/\omega=2.0$ の場合の弾塑性および弾性の非線形応答曲線を示すと、Fig. 2 が得られる。ただし、縦軸は板中央のたわみ、横軸は無次元時間 $\bar{t} = t/T = t(\omega \pi / b^2) \sqrt{(D/\rho h)}$ をそれぞれ示す。ここに、 T は加振振動数の周期、 D は板の曲げ剛さである。また、図中の ● 印は初期降伏が生ずる時刻を表す。図から明らかなように、弾塑性応答解析によるたわみ応答 (Fig. 2(a)) は時刻の経過とともに板中央のたわみが急激に増加し、発散振動に向かうが、板厚の $1/2$ 程度のたわみではほぼ一定の振幅となった。これは端辺の荷重を強制変位で与えたため、板のたわみが無限に発散せず、抑えられたものと考えられる。一方、弾性解の応答曲線 (Fig. 2(b)) には大きなうなりが生じている。



この場合、時刻 $\bar{t}=10.29$ で初期降伏が生ずる。その後、

$\bar{t}=16.0$ から 17.0 までのたわみ応答の 1 周期分に対して板中央での板厚方向の塑性域の拡がりを描くと、Fig. 3 が得られる。図中、実線がたわみの応答を、破線が端辺での作用強制変位の応答を、柱状図が板厚方向の塑性域の拡がりをそれぞれ示す。図から明らかなように、塑性域の拡がりのピークがたわみ応答のピークとややずれている。



他の結果については講演会当日に発表する。