大変形を伴うクラックの変形の一近似解法

京都大学工学部　（正）　西村直志

1．序

本論は、大変形を考慮した Dugdale Model に相当するものを、平面応力、Mode I の場合について求める。

2．解析の基本方針

微小歪における Dugdale Model は，クラック前方の応力が一定になる領域を設け，非線形性の影響を取り入れた破壊力学 Model であると見ることが出来る．大変形の場合についても，同様に，適当な応力状態から出発し，変形を逆算する方針で塑性変形の効果を取り入れた Model を作ることを試みる．以下では，考える物体が Prandtl-Reuss 型構成式を有する非圧縮性弾完全塑性物体であるとする．また平面応力仮定が成り立つとし， von Mises の降伏条件を仮定する．即ち，Euler 表示を用いて，

$$D=\frac{1}{2\mu}(\mathring{T}+\dot{p}\mathbf{1})+\dot{\lambda}T' \quad (1) \qquad T'=T-\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,T \quad (2)$$

$$D=\frac{1}{2}(\nabla u+(\nabla u)^{T}) \quad (3) \qquad \mathrm{tr}\,D=0 \quad (4)$$

$$T'\cdot T'=2k^{2}\ (=\mathrm{Const}) \quad (5) \qquad T_{\alpha\beta,\beta}=0\quad(\alpha,\beta=1,2) \quad (6)$$

とする．ここに，T，v，p，1 は，それぞれ，Cauchy 応力テンソル，速度，不定圧，及び，単位テンソルである．また，$\mathring{T}$ は応力の Jaumann's rate を表す．(5)，(6) は，Cauchy 応力の満たす微分方程式が，微小変形の応力の方程式と同じである事を示している．

次に上のことを考慮して，応力仮定を定める．変形の結果，tip が鈍化し，近似的に半径 a の円弧になったと仮定する．このとき，鈍化した tip 近傍では方程式の双曲性から，応力が良く知られた微小変形の円孔の周りのものと同じになる．一方 tip から離れると，応力は変形を考慮しないクラックの解析の結果に近づくであろう．所で，微小変形の平面応力 Mode I の応力解としては Hutchinson[1] のものと，Thomason[2] のものが知られており，各々の特性曲線は図１，２に示す通りである．これらの違いは，クラック前方に一様応力場が

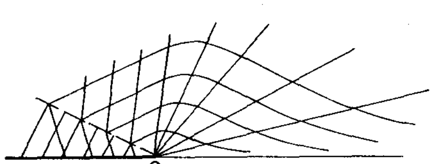


図 1： Hutchinson の解

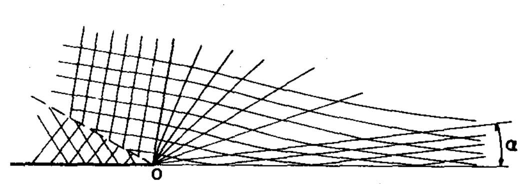


図 2： Thomason の解

N. Nishimura

あるか（Thomason）ないか（Hutchinson）である．これらを先に述べた円孔の解に接続することを考える場合， Hutchinson のものは領域内部に変形の特異性を生ずることなく接続できない事を示すことができる．従って応力仮定としては，円孔の解と Thomason の解を接続したものを用いることになる．但し， Hutchinson の解は微小変形に於て，ある種の弾性体の解の極限として求められ，捨てがたい．一方 Thomason の解に於て，$\alpha = 0$ としたものは Hutchinson の解であるから，我々の解析においても α は非常に小さいとして良いであろう．以上を考慮して，クラック線近傍の応力仮定として次に示すものを用いる．

$$T_r = 2k\cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right),\quad r = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sin\omega}\, e^{\sqrt{3}(\pi/3-\omega)}\right)^{1/2}$$
$$T_\theta = 2k\cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) \quad 0<\omega<\pi/3 \quad (a<r<\kappa a) \cdots \text{円孔応力部}$$

$$T_{11} = k \quad T_{22} = 2k$$
$$T_{12} = 0 \quad r>\kappa a,\ |x_2| \cdots \text{small} \cdots \text{一様応力部}$$

ここに，κ は $(\sqrt{3}e^{\pi/2\sqrt{3}})^{1/2}$ $(=2.07)$ である．

次に，変形を計算する．基本方針は，円孔応力部では構成式から Λ を消去し v を求め，さらに $\dot{X} = 0$ を積分して X を求める．ここに X は，変形前の位置である．一様応力部ではいわゆる Achenbach の方法を用いる．即ち，仮定した応力が，クラック線が速度に関する微分方程式，即ち構成式の特性曲線となる条件を満たしている事を使い，特性曲線法で速度を求め，更に $\dot{X} = 0$ を積分して X を求める．最後に，求まった一様応力部，及び円孔応力部での速度場及び変形を連続条件を用いて繋げば解が求まるが，詳細は[3]に譲る．

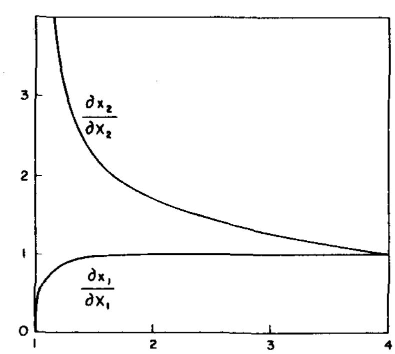
３．結果

得られた結果はかなり複雑であるので，降伏応力が弾性常数に比べて非常に小さいときの結果（クラック線（$x_2 = 0$, $x_1 > a$）上での変形勾配）を図３に示すにとどめる．特異性のオーダーは次のようになる．

$$\frac{\partial x_1}{\partial X_1} \sim O(X_1^{1/2})$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial X_2} \sim O(1/X_1)$$

$$X_1 \sim O((x_1 - a)^{2/3})$$



文献

[1] Hutchinson, J.W., J. Mech. Phys. Solids, 16, p.337, 1968.

[2] Thomason, P.F., in Fracture Mech. in Eng. Appl. (Eds. Sih & Valluri), Sijthoff & Noordhoff, p.43, 1979

[3] Nishimura, N. & Achenbach, J.D., J. Mech. Phys. Solids, 34, p.147, 1986.