積分方程式法による3次元動的破壊力学の解析

京都大学工学部　正員　小林　昭一
京都大学工学部　正員　西村　直志
建　設　省　正員　○金子　正洋

1．はじめに

破壊力学では，クラックの問題を解く場合，積分方程式法は，最も有効な方法の一つである。そしてこの積分方程式法において，解の精度を考える場合，基本解の特異性が重要な問題となる。本研究では，基本解の特異性の処理の仕方を工夫した。

2．積分方程式法によるクラック解析

本研究では，無限線型弾性体内のクラック問題を2重層ポテンシャルを用いて，以下のように定式化した。ここで，物体力＝0としている。

$$\begin{cases} \circ\text{静弾性}: u_j(y) = u_j^{\infty}(y) + \int_S \Gamma_{Iji}\,\varphi_i(x)\,dS & (2.1) \\ \circ\text{動弾性}: u_j(y) = u_j^{I}(y) + \int_S \Gamma_{Iji}\,\varphi_i(x)\,dS & (2.2) \end{cases}$$

ただし，$\lim_{|y|\to\infty} u_j^{\infty}(y) = u_j(y)$，$u_j^{I}(y)$ は入射波による変位，Γ_{Iji} は2重層の核，$\varphi_i(x)$は，クラックによる変位の不連続量を表わす。上式に，演算子 $T_{ik} = \lambda n_i \partial_k + \mu n_j(\delta_{ki}\partial_j + \delta_{jk}\partial_i)$ （λ, μ: Laméの定数，δ_{ij}：クロネッカーのデルタ）をはたらかせると，

$$\begin{cases} \circ\text{静弾性}: 0 = (Tu_j(y) =)\ Tu_j^{\infty}(y) + T\int_S \Gamma_{Iji}\,\varphi_i(x)\,dS & (2.3) \\ \circ\text{動弾性}: 0 = (Tu_j(y) =)\ Tu_j^{I}(y) + T\int_S \Gamma_{Iji}\,\varphi_i(x)\,dS & (2.4) \end{cases}$$

となる。上式においては，ともに右辺第1項は容易に求めることができる。以下，右辺第2項の特異性の処理の仕方について述べる。

3．$T\int_S \Gamma_{Iji}\,\varphi_i(x)\,dS$ の特異性の処理

「$T\int_S \Gamma_{Iji}\,\varphi_i(x)\,dS$」は，$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ を用いると，次のように変形できる。

$$T\int_S \Gamma_{Iji}\,\varphi_i(x)\,dS = -C_{ipqr} n_q \int \Gamma_{ij,kp} C_{jklm} n_l \varphi_m(x)\,dS \qquad (3.1)$$

ただし，Γ_{ji}は1重層の核，n：法線，$,q$（以後∂_qとも書く）は，xのq方向の偏微分を表わす。静弾性，動弾性の釣合式と，部分積分を用いると，

$$\begin{cases} \circ\text{静弾性}: T\int_S \Gamma_{Iji}\,\varphi_i(x)\,dS = C_{ipqr} n_q e_{ulp} C_{jklm} \int \Gamma_{ij,k}\, e_{uts} n_t \varphi_{m,s}\,dS & (3.2) \\ \circ\text{動弾性}: T\int_S \Gamma_{Iji}\,\varphi_i(x)\,dS = C_{ipqr} n_q \left[e_{ulp} C_{jklm} \int \Gamma_{ij,k}\, e_{uts} n_t \varphi_{m,s}\,dS + \rho\omega^2 \int \Gamma_{im} n_p \varphi_m\,dS \right] & (3.3) \end{cases}$$

となる。以下，$\Gamma_{ij} = F\delta_{ij} + \partial_i\partial_j G$ として変形し，平面クラックの場合について考えると，次式のようになる。

$$\begin{cases} \circ\text{静弾性}: T\int_S \Gamma_{Iji}\varphi_i\,dS = C_{ipqr} n_q e_{ulp} C_{jklm} \Big[\int_{\partial S} \Big\{ \Gamma_{ij} e_{vkw} n_v + n_k (n_i e_{ajw} n_a + n_j e_{aiw} n_a) \frac{G'}{r} \Big\} e_{uts} n_t \varphi_{m,s}\,dx_w \\ \qquad - \int_S \Big\{ \Gamma_{ij} e_{vkw} n_v + n_k (n_i e_{ajw} n_a + n_j e_{aiw} n_a) \frac{G'}{r} \Big\} e_{brw} n_b e_{tsu} n_t \varphi_{m,rs}\,dS \Big] & (3.4) \\ \circ\text{動弾性}: T\int_S \Gamma_{Iji}\varphi_i\,dS = (3.4)\text{式} + C_{ipqr} n_q \rho\omega^2 \int \Gamma_{im} n_p \varphi_m\,dS & (3.5) \end{cases}$$

ここで，

・静弾性：$F = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{1}{r}$，$G = -\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} r$　　$r = |x-y|$，ρ：密度，ω：振動数

・動弾性：$F = \frac{k_T^2}{4\pi\rho\omega^2}\frac{e^{ik_T r}}{r}$，$G = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2}\left(\frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_L r}}{r}\right)$　$k_L = \omega/C_L$，$k_T = \omega/C_T$，$C_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$，$C_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

Shoichi KOBAYASHI, Naoshi NISHIMURA, Masahiro KANEKO

4. 計算結果

本研究で、具体的に計算したクラックの形状はfig 4-1のようなものである。すなわち、直交座標系(xyz-座標系)のxy平面上にある形状が長方形(各辺がそれぞれx,y方向)のものを考えた。このクラックに、静弾性の場合、外側に引張り力を、はたらかせ動弾性の場合、-zの方向から、P波、S波を入射させ、それぞれ、応力拡大係数、開口変位を求めた。また、開口変位については、B-スプライン関数を用いて、離散化近似した。積分は、Gauss積分を用い、動弾性の基本解については、$k_L r<1$のときはべき級数展開したものを用いた。

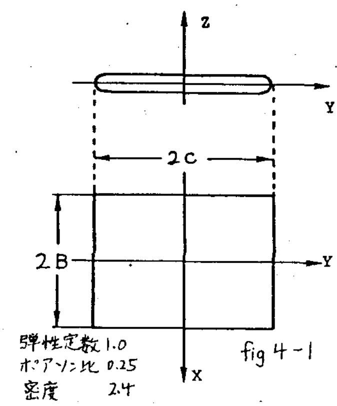

fig 4-1

fig 4-2は、fig 4-1において、$C/B = 1, 3, 5$である長方形クラックに、z方向外側に表面力Pを、はたらかせたときの応力拡大係数である。図の実線は、文献1)によるもので、●でプロットしたものが、本研究で求めた値である。充分一致している。表1は、動弾性の場合の精度を確認するため、$C/B=1$ ($B=C=1$)のときに、クラックの一辺に比べ充分に波長が長い(WL=88.858)P波を、-z方向より入射させ、同様に表面力をはたらかせた静弾性の場合と開口変位の値を、比較したものである。これも充分に一致している。以上の結果より、静弾性、動弾性、それぞれの場合について、解の精度が確認された。

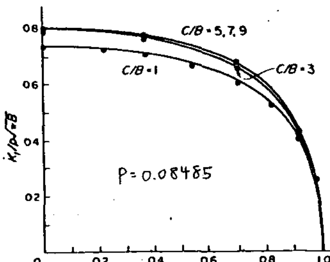

fig 4-2 (a)

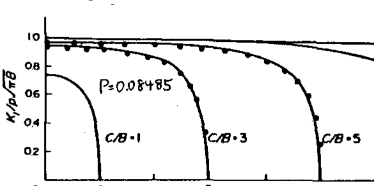

fig 4-2 (b)

開口変位	静弾性	動弾性(Imaginary)
U(1,1)	0.0705	0.0702
U(1,2)	0.1062	0.1058
U(1,3)	0.1163	0.1158
U(2,2)	0.1736	0.1729
U(2,3)	0.1946	0.1939
U(3,3)	0.2203	0.2195

表1　表面力=0.08485

fig 4-3は、$C/B=1$ ($B=C=1$)のとき、-z方向より、波長=2のP波が入射した場合の開口変位を求めたものである。

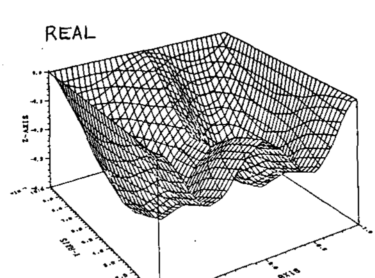

fig 4-3 (a)

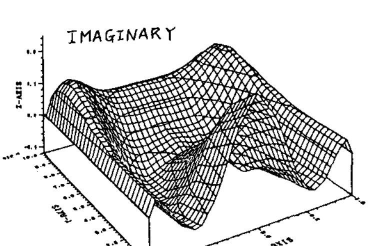

fig 4-3 (b)

参考文献

1) John Weaver:「THREE-DIMENSIONAL CRACK ANALYSIS」 Int. J. Solids Structures 1977 Vol 13 pp 321-330