

積分方程式法による半無限動弾性解析法の再検討

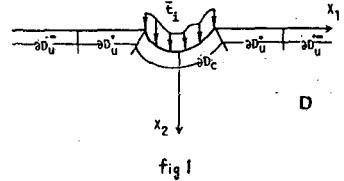
京都大学工学部 正員 小林 昭一
 京都大学工学部 正員 西村 直志
 建設省 正員 ○森 勝彦

1. はじめに

境界積分方程式法によって半無限動弾性問題を解く場合、従来は境界を有限区間で切りそれ以遠を無視して計算する簡便法が用いられてきた。しかし、二次元問題において発生する Rayleigh 波は、自由表面に沿って無限遠まで減衰することなしに伝播することから、境界を有限区間で切ることは何らかの影響を伴うと考えられる。これまで幾つかの方法による検討から従来手法の妥当性を支持する結果が得られているが、検討方法には適切さを欠くものもあり充分信用できるとは言い難い。本研究では、有限境界端に半無限要素を合理的に接合する手法を導入し、無限遠まで積分評価した境界積分方程式の定式化及び数値解析を行ない、従来の方法の再検討を試みた。

2. モデルと定式化

右図に示すような等方均質弾性体の半無限地盤をモデルとして、地表面の一部に時間調和な表面力が作用した場合の定常状態における変位応答を解析する。この際に生じる波動のうちで実体波は急激に減衰するため、表面境界のある範囲以遠での変位は Rayleigh 波成分のみとなり、そこで表面境界を図のように分けて、 $\partial D_c + \partial D_u^0$ においては従来有限区間での積分方程式を全変位について立て、それに Rayleigh 波成分のみと考えられる ∂D_u^∞ の部分を接合してやる。この半無限境界の付加項を半無限要素と呼ぶことにする。



x_1 軸の正方向及び負方向へ伝播する Rayleigh 波の変位をそれぞれ $u_i^+(x)$, $u_i^-(x)$ と置くと、これらは次のように表せる。

$$u_i^\pm(x) = R e^{\pm i k_R x_1} (A_i^\pm e^{-\nu_i x_2} + B_i^\pm e^{-\mu_i x_2}) \quad (\text{複号同順}) \quad (1)$$

ここに、 $A_1^+ = -A_1^- = \sqrt{1-\xi^2}$, $B_1^+ = -B_1^- = -\frac{2\sqrt{1-\xi^2}}{2-\xi^2}$, $A_2^+ = A_2^- = i$, $B_2^+ = B_2^- = -i \frac{2\sqrt{1-\xi^2}(1-\gamma\xi^2)}{2-\xi^2}$, $\xi = \frac{C_R}{C_T}$, $\gamma = \left(\frac{C_T}{C_R}\right)^2$, $k_R = \frac{\omega}{C_R}$

$$\nu_T = \sqrt{k_R^2 - k_T^2}, \quad \nu_L = \sqrt{k_R^2 - k_L^2}$$

C_L, C_T はそれぞれ縦波、横波の伝播速度、 C_R, k_R は Rayleigh 波の伝播速度と波数、 R^+, R^- は振幅の大きさ、 γ は位相を決める複素係数である。

これを用いると上モデルに対して次の境界積分方程式を得る。

$$C_{ik}(x) u_i(x) = \int_{\partial D_c} \Gamma_i^{(k)}(x, y) \bar{t}_i(y) dS_y - \int_{\partial D_c + \partial D_u^0} \Gamma_i^{(k)}(x, y) u_i(y) dS_y \\ - R^+(A_1^+ + B_1^+) W_{ik}^+(x) - R^-(A_1^- + B_1^-) W_{ik}^-(x) \quad (2)$$

Shoichi KOBAYASHI, Naoshi NISHIMURA, Katsuhiko MORI

ただし、 $W_{ik}^+(z) = \int_{x_0^+} \Gamma_{I_i}^{(k)}(z, y_i) e^{ik_R y_i} dy_i$, $W_{ik}^-(z) = \int_{x_0^-} \Gamma_{I_i}^{(k)}(z, y_i) e^{-ik_R y_i} dy_i$ (3)

$\Gamma_i^{(k)}(z, y)$, $\bar{\Gamma}_i^{(k)}(z, y)$ はそれぞれ一重層及び二重層ポテンシャルの核と呼ばれるものである。

$W_{ik}^{\pm}(z)$ は数値評価することができ、 $R^{\pm}$ は一般に既知量とならないためこのまま式(2)を解くことはできない。そこで、境界変位 u_i と $R^{\pm}$ との関係式が必要となる。これは Betti-Rayleigh の相反関係式に単位振幅の Rayleigh 波(変位 $U_i^{\pm}$, 表面力 $T_i^{\pm}$)を補助的に用いることにより次のように求められる。

$$KR^+ + \int_{x_0^+} (U_i^+ \bar{T}_i - u_i T_i^+) ds = 0, KR^+ + \int_{x_0^+} (U_i^+ \bar{T}_i - u_i T_i^-) ds = 0 \quad (4)$$

$$K = 2ik_R \left\{ -(\lambda + 2\mu) \left(\frac{A_1^2}{2l_R} + \frac{2A_1 B_1}{l_R + l_R} + \frac{B_1^2}{2l_R} \right) + \mu \left(\frac{A_2^2}{2l_R} + \frac{2A_2 B_2}{l_R + l_R} + \frac{B_2^2}{2l_R} \right) \right. \\ \left. + (\lambda - \mu)(A_1 A_2 + B_1 B_2) + \frac{2}{l_R + l_R} \left\{ (\lambda l_R - \mu l_R) A_1 B_2 + (\lambda l_R - \mu l_R) A_2 B_1 \right\} \right\} \quad (5)$$

ここに、 λ, μ は Lamé 定数である。

式(2),(4)を離散化し連立させると次のような連立方程式系にまとめられる。

$$\begin{bmatrix} H_{10c} & H_{10c}^+ & W_{10c}^+ & W_{10c}^- \\ T_{10c}^+ & 0 & 0 & -K \\ T_{10c}^- & 0 & -K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(10c) \\ y(10c)^+ \\ R^+ \\ R^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{10c} \\ U_{10c}^+ \\ U_{10c}^- \end{bmatrix} \{ \bar{T}(10c) \} \quad (6)$$

ここに、係数マトリックス内の諸記号は、各変数についての積分核と形状関数の積を積分することによって得られるマトリックスを表す。

式(6)を解くことにより、境界変位 u_i 及び $R^{\pm}$ を求めることができる。

3. 数値解析例

① fig 2 に示したモデルで平坦地盤表面に等分布荷重が鉛直下方に作用した時の変位応答解析を行った。その結果を fig 4, 5 に示す。

② fig 3 のように半円形窪みの半径方向に一様な表面力を作用させる場合を考えた。解析結果を fig 6 に示す。

[各図の説明] L : $10c$ の片側長, l_R : Rayleigh 波の波長。

A: 半無限要素を用いた積分方程式法で求めた変位。

B: 有限区間で切った積分方程式法で求めた変位。

C: 理論解

fig	L/l_R	変位線	破線
4	2.05	A	B
5	2.05	A	C
6	4.1	A	B

SCALE
10
5
0
-5
-10

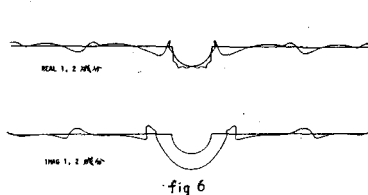


fig 6

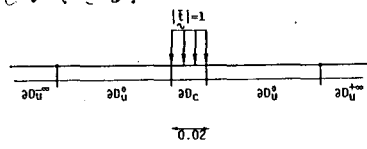


fig 2

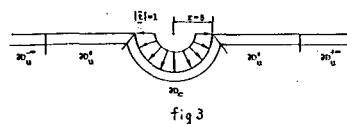


fig 3

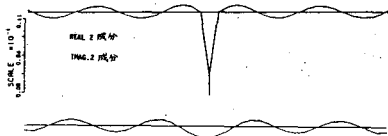


fig 4

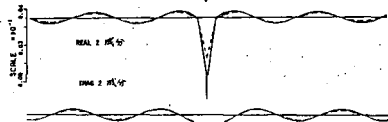


fig 5

解析結果より A, B はよく一致しており従来の有限区間で切る方法の妥当性が裏付けられた。