

移流分散係数に関する一考察

京都大学工学部 正員 岩佐 義朗

京都大学工学部 正員 〇 緩 史郎

1. はじめに: 一方向的なせん断流に瞬間的にトレーサを投入すると、トレーサクラウドは下流に流下するとともに、急速に流れ方向に拡がる。この現象は、移流分散と呼ばれる、2次元中心モメントの時間的変化率の1/2が(移流)分散係数である。先に、著者らは、この現象をLagrange的に解析し、開水路流れに於ける分散(乱流拡散)係数の推定公式を提案した。移流分散現象は、Lagrange的手法のみならずEuler的な手法によ、ても解析可能であり、本報では、Euler的な手法による移流分散係数の考察を行う。

2. 従来の研究のReview: Euler的な手法では、次の乱流拡散方程式

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_1 h_3 \bar{c} \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_2 h_3 \bar{c} \bar{u}_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_3 h_1 \bar{c} \bar{u}_3) \right\} = \frac{1}{h_1 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_1 h_3 e_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\frac{h_3}{h_1} e_2 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\frac{h_3}{h_1} e_3 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_3}) \right\} \quad (1)$$

を基礎式として、移流分散方程式、移流分散係数を求める。ここに、 $\bar{c}$: 局所平均濃度、 $\bar{u}_i$: 局所平均流速、 e_i : 乱流拡散係数、 x_i : 直交曲線座標($i=1$, 主流方向)、 h_i : 測度係数である。移流分散係数については、いくつかの考え方が可能であり、せん断乱流中の乱流拡散係数の断面平均値としてとらえる考え方、乱流拡散係数に加えて、断面内における局所平均流速分布の非一様性による流下方向の質量輸送速度の非一様性の効果を考慮するものがある。本章では、後者の考え方による円管路内層流の分散係数を求めたTaylorの研究²⁾に始まる移流分散理論をまとめる。

(1)より、以下の仮定(a)~(e)を用いて、式(2)が導かれる。

(a) 流れは、定常で流下方向に一様である。(b) 流下方向の乱流拡散による輸送は、局所平均流速による輸送に加算的である。(c) 断面内の質量輸送について、2次流の輸送は、乱流拡散輸送に対して無視できる。(d) $\bar{u}_1$ は、次の様に分解できる。

$$\bar{u}_1 = U + u_1''(x_2, x_3), \quad U \equiv \int \bar{u}_1 h_2 h_3 dx_2 dx_3 / A = \text{Const.}, \quad u_1'' \equiv \bar{u}_1 - U$$

(e) $\bar{c}$ は、次の様な2種の濃度の和で示される。

$$\bar{c} = C_3 + c''(x_2, x_3), \quad \partial C_3 / \partial x_3 = \text{Const.}, \quad \partial c'' / \partial \bar{c} = 0, \quad C_3 \gg c'', \quad x_3 = x_1 - Ut, \quad t = t$$

$$u_1''(x_2, x_3) \frac{\partial C_3}{\partial x_3} = \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} (\frac{h_3}{h_2} e_2 \frac{\partial c''}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\frac{h_3}{h_1} e_3 \frac{\partial c''}{\partial x_3}) \right\} \quad (2)$$

また、分散係数 D_L は、次式で定義されている。

$$D_L \equiv E_1 + D_1 \quad (3), \quad E_1 \frac{\partial C_3}{\partial x_3} \equiv \frac{1}{A} \int e_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} h_2 h_3 dx_2 dx_3 \quad (4), \quad D_1 \frac{\partial C_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{A} \int c'' u_1'' h_2 h_3 dx_2 dx_3 \quad (5)$$

仮定(a)~(c)は、移流分散方程式から一般の流れ場に対して導かれる²⁾ことより、現象として本質的ではない。仮定(e)の C_3 , c'' の物理的意味は曖昧であるが、Fischer³⁾によれば、 C_3 は断面平均濃 $\bar{C}$, c'' はそれからの偏差である。

Taylor の解析法では、 u'' の分布を既知とし、(2)より C'' を求め、(5)により D を求めることになる。(2)の独立変数は x_2, x_3 であり解析解を求めることは困難であるが、濃度分布が1次元的(x_2 のみの関数)の時常微分方程式となり、解を求めることができ、

$$D_1 = \frac{1}{A} \int_{x_{2a}}^{x_{2b}} \frac{h_2 dx_2}{x_2^2} \left[\int_0^{x_3} u'' \frac{dA}{dx_2} dx_3 \right]^2, \quad R(x_2) = \int_{x_{3a}}^{x_{3b}} h_3 dx_3, \quad A(x_2) = \int_0^{x_2} \int_{x_{3a}}^{x_{3b}} h_2 h_3 dx_3 dx_2 \quad (6)$$

となる。 $x_2 = \text{const.}$ の曲線が等流速線となるように座標系をとることにより、Taylor は円管路内乱流⁴⁾、Hayakawa et al⁵⁾ は、半楕円断面内乱流⁵⁾の分散係数を求めた。また、Elder⁶⁾ は、同様の手法で2次元流における分散係数を求めた。

一方、Fischer は河川流に対して、 x_2 座標を水路幅方向に(等濃度線は、鉛直方向)にとることにより、(2),(5)より、分散係数を求めた。Fischer と Hayakawa et al の結果では、 D_L と D_T の関係が全く異なるが、これは、仮定する等濃度線の形が全く異なっていることによるものである。

3. 開水路流れの移流分散方程式と分散係数: (1)に、1次元解析法を適用すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \bar{c} h_2 h_3 dx_2 dx_3 \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\bar{u}_1 \int \bar{c} h_2 h_3 dx_2 dx_3 \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(e_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_1} \int h_2 h_3 dx_2 dx_3 \right) \quad (7)$$

を得る。 $\bar{u}_1$ 、 $\bar{c}$ 次の様に分解できるものとする。

$$\bar{u}_1 = U + (\bar{u}^* - U) + u_{y2}^* \quad (8) \quad \bar{c} = C + (\bar{c}^* - C) + c_{y2}^* \quad (9)$$

$$\therefore \text{に、} B = \frac{1}{A} \int \bar{c} dA, \quad \bar{c}^* = \frac{1}{A} \int \bar{c}^* dA, \quad b_{y2}^* = \bar{c} - \bar{c}^*, \quad d = \eta + \epsilon$$

である。(8),(9)より(7)左辺第2項は、

$$M = UC + \int (\bar{u}^* - U)(\bar{c}^* - C) dA + \int u_{y2}^* c_{y2}^* dA \quad (10)$$

であり、(10)右辺第2,3項を勾配輸送型で示すと、

$$D_L \text{ は } D_L = E_1 + D_{10} + D_{12} \quad (11)$$

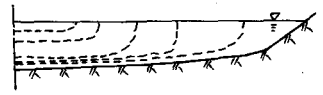
$$D_{10} \frac{\partial C}{\partial x_1} = \frac{-1}{A} \int u_{y2}^* c_{y2}^* dA \quad (12), \quad D_{12} \frac{\partial C}{\partial x_1} = \frac{-1}{A} \int (\bar{u}^* - U)(\bar{c}^* - C) dA \quad (13)$$

となる。(11)において、 E_1 は乱流拡散による、 D_{10} は水深方向の、 D_{12} は水路幅方向の局所平均流速の非一様性に起因する輸送を示している。(13)式より、

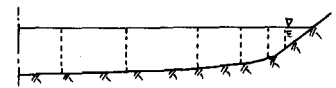
$$D_{12} = \frac{1}{A} \int_{b_1}^{b_2} \frac{d\bar{c}_1}{dx_1} \left[\int_{-b_1}^{\bar{c}_1} (\bar{u}^* - U) d\bar{c}_1 \right]^2 \quad (\bar{c}_1: \text{水路幅方向座標}) \quad (14)$$

を得、これはFischerの求めた分散係数に一致する。Fig. 2 は実験された分散係数と(14)を比較したものである。 E_1 、 D_{10} の評価は難しいが、Elderの結果を参考に1て、 $E_1/dU_* = 0.04 \sim 1$ 、 $D_{10}/dU_* = 6.3 (k=0.4) \sim 15.0 (k=0.3)$ の値とすると、(11)による D_L の推定がほぼ妥当なことが理解される。

参考文献: 1) Taylor, G. I. (1953): Proc. Royal Soci. London, 2) Zwisa, Y. (1976): Proc. Unsteady Flow in Open Channel, 3) Fischer, H. B. (1966): Report KH-R-12, Caltech, 4) Taylor, G. I. (1954): Proc. Royal Soci. London, 5) Hayakawa et al (1984): Proc. JSCE, 6) Elder, J. W. (1959): J. F. M. 7) 岩佐雄他 (1983): 京都大学防災研究所年報



(a) 等流速線



(b) 仮定される等濃度線

Fig. 1 等流速線と等濃度線

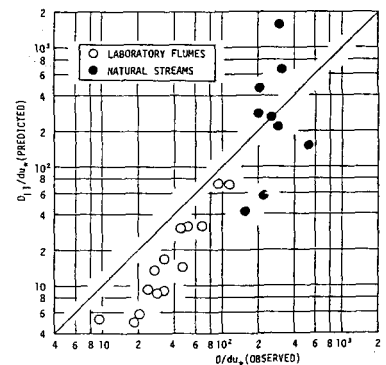


Fig. 2 分散係数