

水理学を対象とした境界要素法の適用について (その十)

京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗 京都大学工学部 正 員 寺田 彰彦
○建設 省 正 員 泊 宏 京都大学大学院 学生員 福本 育央

1. はじめに; 境界要素法は、定式化の段階で未知量の次元が下がるために、計算機容量や計算時間の面で有利な数値解析法といわれているが、差分法や有限要素法に比べてその適用例は少ない。本報では、境界要素法を用いて浅い湖の吹送流を数値解析する手法を開発し、諏訪湖へ適用した結果を示して境界要素法の有効性、妥当性

について考察したものである。

2. 定常流の数値解析; エクマンタイプモデルの基礎式¹⁾は(1)~(4)式で、記号は慣用に従っている。

$$-fU = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_v \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$fU = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + A_v \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$\partial = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

境界条件は、水底で $U=V=W=0$ 、水面で $A_v \frac{\partial U}{\partial z} = \tau_x$, $A_v \frac{\partial V}{\partial z} = \tau_y$ である。ただし、 τ_x, τ_y は x, y 方向の風のせん断応力を水の密度 ρ で除したものである。ここで、(5)式で定義される流れ関数 ψ を導入すると、最終的に(6)式が得られる。

$$\bar{U} = \frac{1}{L} \int_0^L U dz = \frac{1}{L} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \bar{V} = \frac{1}{L} \int_0^L V dz = -\frac{1}{L} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \psi = A(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + C(x, y) \quad (6)$$

本来、境界要素法は現象を支配する基礎方程式が線形で基本解を有する場合にしか適用できない。しかし、(6)式の中の C の値が $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ や $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ に比べて大きいというLiggettの指摘に従うならば近似的に解くことができる。すなわち、(6)式の右辺を既知項と仮定して b とおき、二次元Laplace方程式の基本解 $\psi^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ を用いて定式化すると、次式が得られる。

$$C \psi^* + \int_{\Omega} b \psi^* d\Omega + \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \quad (7)$$

ただし、 C は領域内部で1、境界上で $-\frac{\partial}{\partial n}$ である。ここで、第一次近似として $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ を与えることにより、境界上の未知量を解き、ついで領域内部での流れ関数 ψ を求め、新たに得られた流れ関数のこう配を用いて再び同じ計算を繰り返す(図-1参照)。次に、以上の解析手法を諏訪湖へ適用した。河川等の流出入量は小さいものとして無視する。したがって、(6)式に対する境界条件は全湖岸において $\psi=0$ とし、Dirichlet問題として取り扱う。南西から3mの風が吹

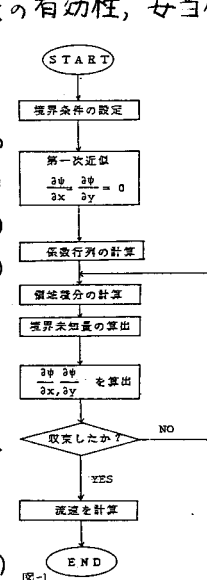
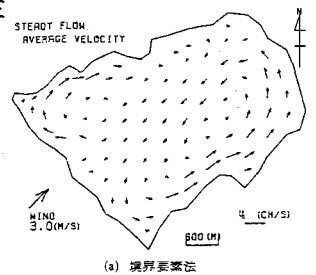
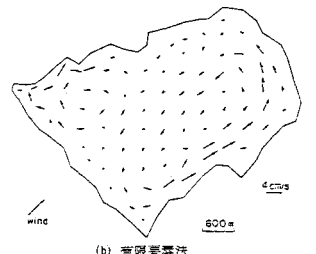


図-1 定常流解析のフローチャート

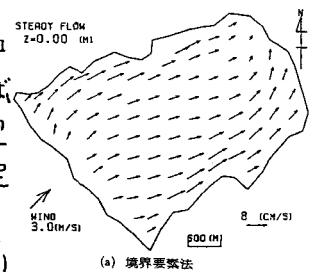


(a) 境界要素法

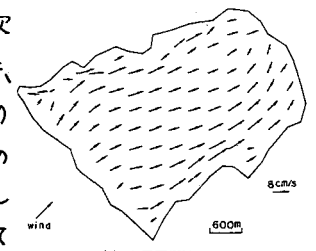


(b) 有限要素法

図-2 平均流速ベクトル (定常解)



(a) 境界要素法



(b) 有限要素法

図-3 表面流速ベクトル (定常解)

いた場合の平均流速ベクトルを図-2に示す。(a)は境界要素法、(b)は富所²⁾が行った有限要素法による解析結果で、地形データ、水理条件等は全く同じものを用いている。いずれも水深が浅い湖岸付近では風と同じ向きに、水深が深い湖中央部では風と逆向きに流れが生じており、それに伴って二つの水平環流が生じている。同様に、図-3に表面流速ベクトルを示す。(a),(b)は局所的に若干異なるもののほぼ一致している。また浮子の漂流観測結果²⁾より、表面流速の大きさは風速の2~3%であること、その向きは風下よりやや時計まわりにずれていることが明らかになっている。以上より境界要素法による解析結果は、現地観測や有限要素法による解析結果と比較してほぼ妥当といえる。さらに北西の風3m/sの条件で、湖中央部の水面下の点における流速ベクトルを図示すると図-4のようになり、深くなるにつれて流れの向きは時計まわりに変化している。これは、一般にエワマンズパイラルと呼ばれるもので、コリオリ力が影響していると考えられる。図-4より明らかなように、水面下1.3m付近を境に上層と下層で流れの向きが逆転している。そこで、水面下1.3mにおける流速の鉛直成分の分布を示すと図-5のようになり、湖の北岸近くで上昇流が、南岸近くで下降流が生じており鉛直環流の存在が確認された。

3. 非定常流の数値解析; 基礎式³⁾は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + A_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla^2 v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + A_v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

(3)以下は、2. と同じである。ここで、

$$\tilde{u} = \int_0^\infty u e^{-st} dt$$

で示されるLaplace変換を行うと、最終的に次式を得る。

$$\nabla^2 \tilde{\psi} = A(x, y, s) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + B(x, y, s) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} + C(x, y, s) \quad (6')$$

(6')式を前述の手法で境界要素法により解き、Shapery⁴⁾の方法で数値的逆変換を行い、仕度の時刻での流速を求める。計算条件は、静止している湖に $t=0$ から南西より3m/sの風が一様に吹き続けるものとする。 $t=1$ [hour], 8 [hour]における表面流速ベクトルを図-6,7に示す。はじめの風と同じく北東へ流れていた流速ベクトルは時間の経過とともにその大きさを増大し、その向きは時計まわりにずれていき、 $t=24$ [hour]では定常解(図-3(a))にほとんど漸近している。

十. おわりに; 定常流の解析結果は現地観測や有限要素法による解析結果とほぼ一致し、非定常流の解析結果は定常解を再現することができ、本研究で開発した手法が湖流の特性を把握するのに有効な手段であることが確認された。また、境界要素法を適用することにより未知量の数は大幅に減少した。しかし、反復計算のたびに領域積分を行わねばならず、期待したほどの計算時間の短縮は見られなかった。

参考文献 1) J.A.Liggett and C.Hadjitheodorou; Proc.ASCE, HY2, 1969, pp.609-620. 2) 富所五郎; 閉鎖水域における風成流の基礎的研究, 京都大学学位論文 3) F.D.L.Young and J.A.Liggett; Proc.ASCE, HY2, 1977, pp.109-121.

4) R.A.Shapery; Proc.4th U.S.National Congress of Applied Mechanics, Vol.2, pp.1075-1085.

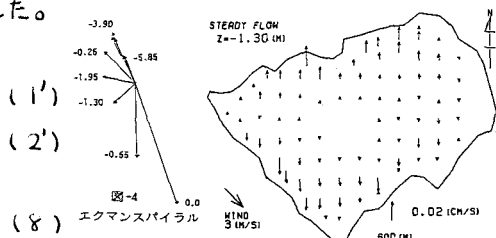


図-5 流速ベクトル (鉛直成分)

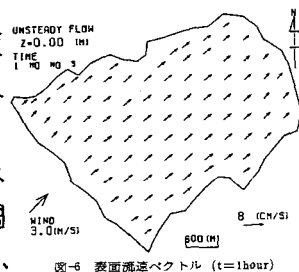


図-6 表面流速ベクトル (t=1hour)

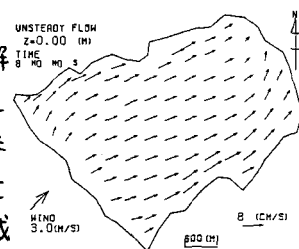


図-7 表面流速ベクトル (t=8hour)